# 三角學發展史簡介

趙文敏
國立臺灣師範大學數學系

## 一、埃及、巴比倫、中國的三角學概念

三角學的觀念起源甚早；遠在古埃及時代，爲了要使金字塔的四個面斜度保持相同，埃及人就引進了近代三角學中角的餘切概念；不過，在當時埃及人並沒有使用餘切這個名稱。西元1858年，一位蘇格蘭古董商人Henry Rhind在尼羅河邊一處城市購得一卷1呎高18呎長的紙草，這份紙草據考證是由紀元前1600年左右一位學者Ahmes抄寫流傳下來的，因此，現代人稱之爲Rhind紙草或Ahmes紙草（現存於英國博物館）。在這份紙草中有五個問題（第56題至第60題）討論關於金字塔的測量問題，其中有四個問題提到了seqt，雖然Ahmes並未將seqt的意義解釋清楚，但是根據其上下文的意義，一般以爲右圖1所示之金字塔的seqt很可能就是∠OMV的餘切。

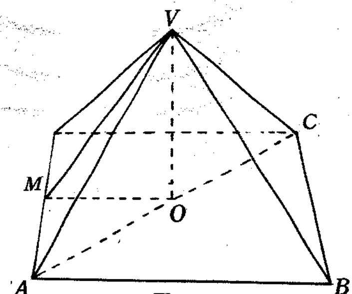

圖1

另一方面，當巴比倫人在兩河流域建立輝煌的巴比倫文化時，數學也開始在此地萌芽。在考古學者從兩河流域掘出的古物中，有一塊被編爲Plimpton第322號的瓦片，上面就可看出巴比倫人數學成就的一部分。這塊瓦片現在收藏在美國哥倫大亞大學G. A. Plimpton收藏館中。據考證的結果，這塊Plimpton 322瓦片約是由紀元前1900年至紀元前1600年間流傳下來的，其形狀如下圖2：

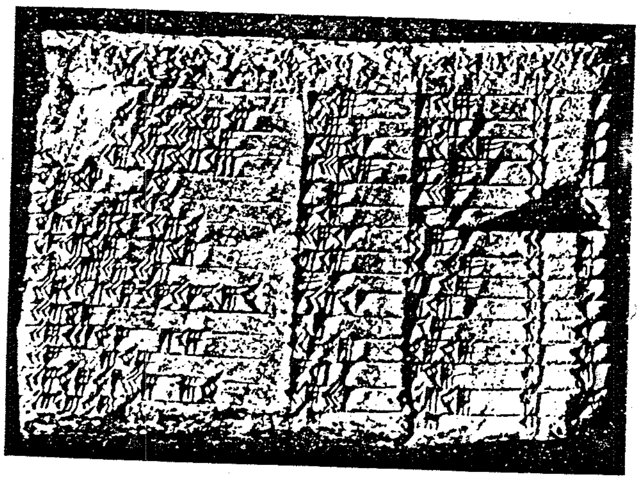
圖2

在這塊瓦片上有四欄數字，若將上面的巴比倫數字轉換成阿拉伯數字，則這些數字變成下表 1：

表 1

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1;59; 0;15 | 1;59 | 2;49 | 1 |
| 1;56;56;58;14;50; 6;15 | 56; 7 | 3;12; 1 | 2 |
| 1;55; 7;41;15;33;45 | 1;16;41 | 1;50;49 | 3 |
| 1;53;10;29;32;52;16 | 3;31;49 | 5; 9; 1 | 4 |
| 1;48;54; 1;40 | 1; 5 | 1;37 | 5 |
| 1;47; 6;41;40 | 5;19 | 8; 1 | 6 |
| 1;43;11;56;28;26;40 | 38;11 | 59; 1 | 7 |
| 1;41;33;59; 3;45 | 13;19 | 20;49 | 8 |
| 1;38;33;36;36 | 9; 1 | 12;49 | 9 |
| 1;35;10; 2;28;27;24;26;40 | 1;22;41 | 2;16; 1 | 10 |
| 1;33;45 | 45 | 1;15 | 11 |
| 1;29;21;54; 2;15 | 27;59 | 48;49 | 12 |
| 1;27; 0; 3;45 | 7;12; 1 | 4;49 | 13 |
| 1;25;48;51;35; 6;40 | 29;31 | 53;49 | 14 |
| 1;23;13;46;40 | 56 | 53 | 15 |

這些數字看起來似乎沒有特殊意義，但是，由於巴比倫人是使用 60 進位，若將這些數字用 10 進位法表示，則上表中的第二、三、四欄的數字變成下表 2：

表 2

| | | |
|---|---|---|
| 119 | 169 | 1 |
| 3367 | 11521* | 2 |
| 4601 | 6649 | 3 |
| 12709 | 18541 | 4 |
| 65 | 97 | 5 |
| 319 | 481 | 6 |
| 2291 | 3541 | 7 |
| 799 | 1249 | 8 |
| 541* | 769 | 9 |
| 4961 | 8161 | 10 |
| 45 | 75 | 11 |
| 1679 | 2929 | 12 |
| 25921* | 289 | 13 |
| 1771 | 3229 | 14 |
| 56 | 53* | 15 |

在這個表中，第四欄的數字只是由上往下編號，至於第二、三兩欄中的數字，若將註有 * 號的 11521 改爲 4825，541 改爲 481，25921 改爲 161，53 改爲 106，再於下圖的直角三角形中，令 $c$ 表示第三欄的數字，$b$ 表示第二欄的數字，

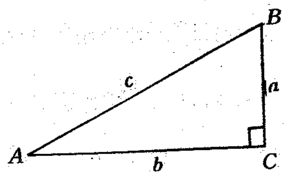


圖 3

後世數學家們發現:

(1) $\sqrt{c^2-b^2}$ 都是整數。

(2) 若將第一欄每個數字1後面的分號看成小數點,則第一欄的數恰好是$(\frac{c}{b})^2$,即$\angle A$的正割的平方;

(3) 由於第一欄的數值是$\sec^2 A$,則$\angle A$之值大約是從45°降到31°。

雖然後世數學家並未弄清楚這塊Plimpton 322 在當時的確實用途,不過,由這塊瓦片應可斷定巴比倫人了解畢氏定理及角的正割觀念。

約在同一時期,中國的周髀算經在紀元前12世紀至11世紀間問世,在其中直角三角形的概念已被用來測量距離、高度、與深度。因此,數學家們以為有關直角三角形邊長的比值也被考慮過,也就是說,有關平面三角學的初步概念可能在這個時期中國人就已經使用了。

其次,在九章算術中,也曾稍微涉及到弦、矢、弧之間關係的一些知識。不過,這些都只是純幾何方面的計算問題,所謂三角函數的概念並未眞正發芽。隋、唐之際,印度天文學傳入中國,但是,印度的球面三角法並沒有引起中國天文學家及數學家的重視。

北宋科學家沈括著有夢溪筆談二十六卷,其中的「會圓術」就引進了弦、矢、弧間的一個關係式。元朝王恂、郭守敬等人所創「授時術」,其中的推算方法也得出了一些球面幾何上的知識,可惜這些方法都沒有繼續發展下去。因此,中國天文學上,對球面三角法的全面應用,是西元十七世紀西學輸入以後的事了。

## 二、三角學之父 Hipparchus

在希臘,由於天文觀測的需要,三角學的雛型也很早就開始孕育著。他們最早的探討方向是圓心角的度數與其所張之弦長的關係。早在紀元前五世紀Hippocrates of Chios 對於這兩者的關係以及其性質就有所了解。而在紀元前四世紀,Eudoxus of Cindus 就可能已使用比例及角的度量等方法來決定地球的大小以及太陽、月亮間的距離。Euclid 在他的幾何原本中雖然沒有任何有關三角學的字眼,但是,他却以幾何的形式證明了鈍角及銳角三角形的餘弦定律(第二卷命題12及13)。Archimedes 的弦長公式則已經是正弦函數的和角、差角公式的幾何形態。其後,Aristarchus of Samos 曾於紀元前260年左右企圖計算地球與太陽、月亮之間的距離,他利用月亮半圓的時候(即太陽、地球、月亮形成一個直角三角形),觀察計算得日地連線與日月連線的夾角是一象限的三十分之一,即3°(當時,希臘人還沒有一圓周是360°的觀念),因而推得月地的距離與日地的距離之比值介於$\frac{1}{18}$與$\frac{1}{20}$之間。他所使用的幾何推理是正確的,可惜觀測器械過於簡陋,以致於所得的結果與實際情況頗有出入,因為上面所提的角實際上還不到1°。不過,Aristarchus所使用的證明方法中,已經使用了正切函數的概念。

截至Aristarchus of Samos 及Eratosthenes of Cyrene(紀元前三世紀,他的一項成就是推算地球的經度線長約有24,600哩),希臘數學家們只着重於線與圓之關係的探討,並將所得的結果應用於天文的觀測,至於三角學的有系統研究則尚未開始。直到紀元前150年至100年之間,第一個

三角函數值表才由希臘著名的天文學家Hipparchus of Nicaea（180 B. C. — 125 B. C.）編製成功，Hipparchus 因而獲得了「三角學之父」的頭銜。根據西元四世紀希臘數學家Theon 的說法，Hipparchus 曾寫過十二本書討論角度與弦長的問題，可惜他的作品流傳下來的只有一本，有關他的成就大都是經由西元二世紀埃及數學家Claudius Ptolemy 的轉述才爲後人所知。

希臘的三角學主要在討論現代所謂的球面三角，當然在探討的過程中，平面三角的內容也會牽涉進去。而要討論球面三角，必需先了解球面幾何，例如，球面上的大圓以及球面三角形的性質。Hipparchus 可能是最先將一圓周分成 360° 的人，在他討論弦長與角度的問題時，他將圓的半徑定義爲 60 個單位。然後，編製一個圓心角的度數以及其所張之弦長的對照表，雖然，他所編製的弦長表業已失傳，可是，他的方法都已經納入了Ptolemy 的著作Almagest 一書中。他們所使用的方法實際已經使用了正弦函數的概念，在右圖 4 中，弦$\overline{AB}$的長度，以現代的符號表示，應該是 $120\sin\alpha$（半徑是 60），因此，對各種不同的角度$\alpha$，計算弦$\overline{AB}$的長，這項結果已經是正弦函數值表的一種形式了。

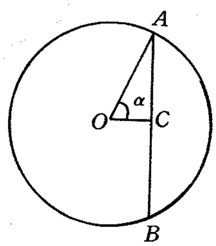


圖 4

## 三、兩位大師 Menelaus 與 Ptolemy

希臘的三角學到了西元一世紀的Menelaus 時代到達了高潮。Menelaus也是一位天文學家，他曾寫了Chords in a circle 一書共六卷，可惜全都失傳了；幸好他的另一部著作Spherics 三卷經由阿拉伯人的譯述而流傳下來，這部著作不僅是現存最古老的球面三角學書籍，而且對幾何與三角的整體介紹有很大的貢獻。

在Spherics 第一卷中，Menelaus 介紹了球面三角形，即利用球面三個比半圓小的大圓弧所圍成的三角形。這本書的目的是證明了與Euclid 幾何中平面三角形類似的定理，例如，球面三角形之兩邊長之和大於第三邊之長；球面三角形中等邊所對的角也相等；球面三角形中三個角之度數和大於兩個直角。除了這些與平面三角形相似的性質之外，Menelaus 還提出球面三角形所特有的一個性質：兩個球面三角形的三組對應角都相等時，這兩個球面三角形必全等。

Spherics 第二卷是討論球面三角學在天文學上的應用，其中的內容不是屬於純數學的範疇。

第三卷中有一個非常有名的定理，近代數學中稱之爲Menelaus 定理；在這本書中，Menelaus所證明的是球面三角形的情形，事實上，這個定理在平面三角形中也成立，不過，他可能將平面三角形的情形證明在他已失傳的其他著作之中。這個定理是這樣的：設$\triangle ABC$是一個球面三角形，而有一大圓與$\triangle ABC$的三邊或其延長線分別交於$P_1$，$P_2$，$P_3$（參看圖5(a)），則可得

$$\frac{\text{chord } 2\widehat{AP_1}}{\text{chord } 2\widehat{P_1C}} \times \frac{\text{chord } 2\widehat{CP_3}}{\text{chord } 2\widehat{P_3B}} \times \frac{\text{chord } 2\widehat{BP_2}}{\text{chord } 2\widehat{P_2A}} = 1 ,$$

其中，chord $2\widehat{AP_1}$ 表示$\widehat{AP_1}$ 之兩倍弧所張之弦的長度。若以近代三角學的正弦函數表示，則上式變成

$$\frac{\sin \widehat{AP_1}}{\sin \widehat{P_1C}} \times \frac{\sin \widehat{CP_3}}{\sin \widehat{P_3B}} \times \frac{\sin \widehat{BP_2}}{\sin \widehat{P_2A}} = 1 \text{ ,}$$

其中，$\sin \widehat{AP_1}$ 表示 $\widehat{AP_1}$ 所對之圓心角的正弦。

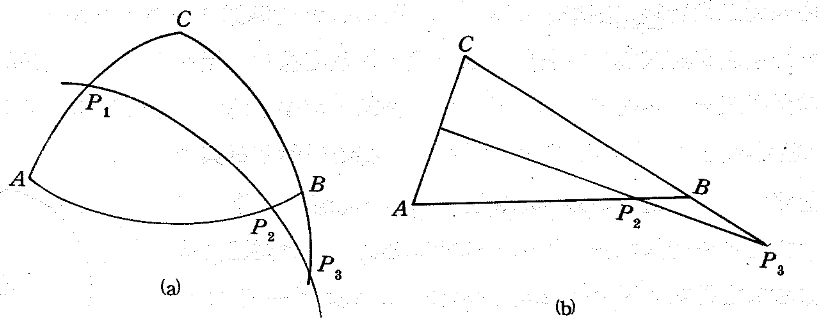


圖5

這個定理在平面三角形中的形式是：在圖5(b)中，任一直線與$\triangle ABC$的三邊分別交於$P_1$，$P_2$，$P_3$，則可得

$$\frac{\overline{AP_1}}{\overline{P_1C}} \times \frac{\overline{CP_3}}{\overline{P_3B}} \times \frac{\overline{BP_2}}{\overline{P_2A}} = 1 \text{ 。}$$

Menelaus 的這個定理，最早發現的人到底是Menelaus，或Hipparchus，或者是Euclid，後世數學家並沒定論，但是，在古代流傳下來的數學著作之中，這個定理是以Spherics一書爲最古。

Spherics 第三卷的第二個定理是這樣的：設$\triangle ABC$與$\triangle DEF$是兩個球面三角形，若$\angle A = \angle D$，$\angle C = \angle F$，則

$$\frac{\text{chord } 2\widehat{BC}}{\text{chord } 2\widehat{EF}} = \frac{\text{chord } 2\widehat{AB}}{\text{chord } 2\widehat{DE}} \text{ ,}$$

或是說，

$$\frac{\sin \widehat{BC}}{\sin \widehat{EF}} = \frac{\sin \widehat{AB}}{\sin \widehat{DE}} \text{ 。}$$

顯然地，若$\triangle ABC$與$\triangle DEF$都是平面三角形，則由$\angle A = \angle D$，$\angle C = \angle F$，可由相似三角形的性質，得

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} \text{ 。}$$

Spherics 第三卷的定理5是這樣的：設有四個大圓都過$O$點，另有兩個大圓與這四個大圓依次交於$A$，$B$，$C$，$D$；及$A'$，$B'$，$C'$，$D'$，如圖6(a)所示，則得

$$\frac{\text{chord } 2\widehat{AB}}{\text{chord } 2\widehat{CB}} : \frac{\text{chord } 2\widehat{AD}}{\text{chord } 2\widehat{CD}} = \frac{\text{chord } 2\widehat{A'B'}}{\text{chord } 2\widehat{C'B'}} : \frac{\text{chord } 2\widehat{A'D'}}{\text{chord } 2\widehat{C'D'}} \text{ ,}$$

或者說，

$$\frac{\sin \widehat{AB}}{\sin \widehat{CB}} : \frac{\sin \widehat{AD}}{\sin \widehat{CD}} = \frac{\sin \widehat{A'B'}}{\sin \widehat{C'B'}} : \frac{\sin \widehat{A'D'}}{\sin \widehat{C'D'}} \text{。}$$

這個定理在平面圖形上的對應結果是：在下圖 6 (b)中，有共點的四線被另外二直線分別截於 $A$，$B$，$C$，$D$；及 $A'$，$B'$，$C'$，$D'$，則

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'B'}} : \frac{\overline{A'D'}}{\overline{C'D'}} \text{。}$$

後面這個結果却是在西元三世紀 Pappus 的著作 Mathematical Collection 中才提出證明。

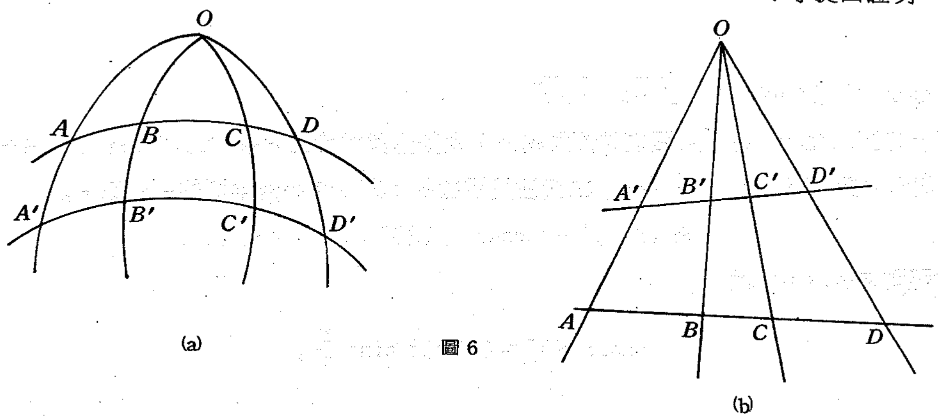


圖 6

希臘三角學及其在天文學上的應用，在西元二世紀埃及數學家 Claudius Ptolemy 的著作 Mathematical Syntaxis 問世後達到了顛峯。這部著作共分十三卷，它東傳至阿拉伯之後，阿拉伯人把這著作稱爲 Almagest，意即 the greatest；後世有幸，Almagest 流傳下來了。

Ptolemy 在 Almagest 第九卷中，仿照 Hipparchus 及 Menelaus 的方法，將圓周分成 360 等分（他還沒有使用 degree 這個字），而直徑則分成 120 等分；然後，對每段給定的弧（其大小以圓周上的等分法來量度）求其所張之弦的長度（其長度則以直徑上的等分法來量度）。

Ptolemy 先計算 $36°$ 及 $72°$ 之弧所對的弦長。在下圖 7 (a)中，$\overline{AC}$ 爲一直徑而 $D$ 是圓心，$\overline{BD}$ 與 $\overline{AC}$ 垂直於 $D$，$E$ 是 $\overline{DC}$ 的中點，而 $\overline{BE} = \overline{EF}$。Ptolemy 以幾何方法證明 $\overline{FD}$ 等於這個圓的內接正十邊形的邊長，而 $\overline{BF}$ 則是內接正五邊形的邊長；因爲 $\overline{ED}$ 是 30 個單位長，$\overline{BD}$ 是 60 個單位長，而 $\overline{EB}^2 = \overline{ED}^2 + \overline{BD}^2$，故 $\overline{ED}^2$ 是 4500 個平方單位，於是，他得到 $\overline{EB} = 67 \quad 4'55''$（這個記號的意義是 $67 + \frac{4}{60} + \frac{55}{60^2}$ 個單位長），這個值自然只是近似值，以近代的表示法，$\overline{EB} = 30\sqrt{5}$。

接著，他得到 $\overline{FD} = 37 \quad 4'55''$，這個值就是他所得的 $36°$ 弧所張的弦長。再利用直角三角形 $FDB$，他求得 $72°$ 弧所張的弦長 $\overline{BF} = 70 \quad 32'3''$，以近代的表示法，$\overline{BF}$ 的正確值爲 $30\sqrt{10-2\sqrt{5}}$。

利用內接正六邊形，Ptolemy 立刻得 $60°$ 弧所張的弦長爲 60 單位長。利用內接正方形，Ptolemy 得到 $90°$ 弧所張的弦長爲 $84 \quad 51'10''$，當然，這個長度的正確值是 $60\sqrt{2}$。利用內接正三角形，Ptolemy 求得 $120°$ 弧所張的弦長爲 $103 \quad 55'23''$，當然，這個長度的正確值是 $60\sqrt{3}$。

利用下圖 7 (b)中的直角三角形 $ABC$，只要知道 $\widehat{BC}$ 所張之弦長，則可求出其互補弧 $\widehat{AB}$ 所張之弦長。由於 Ptolemy 已知 $36°$ 弧所張之弦長，因此，他又求得 $144°$ 弧所張之弦長爲 $114 \quad 7'37''$，

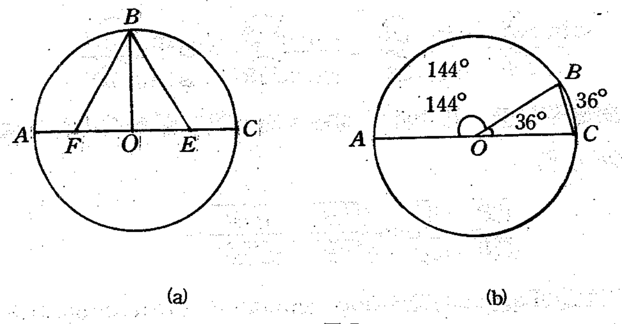


圖 7

當然，這個長度的正確值是 $30\sqrt{10+2\sqrt{5}}$。

前面所提到的弧與互補弧所張之弦長的關係，實際上與近代三角學中的恒等式 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ 意義相同。關於這一點，Ptolemy 的說法是這樣的：若 $S$ 是小於半圓的一段弧，則

$$(\text{chord } S)^2+(\text{chord}(180°-S))^2=(120)^2,$$

以近代的記號來表示，則因

$$(\text{chord } S)^2=(120)^2\sin^2\frac{S}{2},$$

故得

$$(120)^2\sin^2\frac{S}{2}+(120)^2\sin^2(\frac{180°-S}{2})=(120)^2,$$

或者是

$$\sin^2\frac{S}{2}+\sin^2(\frac{180°-S}{2})=1,$$

亦即

$$\sin^2\frac{S}{2}+\cos^2\frac{S}{2}=1。$$

有了前面所得的基本結果之後，Ptolemy 證明了一個很有用的定理，後世稱之爲 Ptolemy 定理，這個定理是這樣的：若 $ABCD$ 是內接於圓的一個四邊形，則 $\overline{AC}\times\overline{BD}=\overline{AB}\times\overline{CD}+\overline{AD}\times\overline{BC}$（參看下圖 8 (a)）。要證明這個定理，只需在 $\overline{BD}$ 上取一點 $E$，使得 $\angle DCE=\angle ACB$，則 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEC$ 相似，$\triangle ACD$ 與 $\triangle BCE$ 相似，利用對應邊成比例的關係即可得出。

有了前面這個定理，Ptolemy 取 $\overline{AD}$ 爲直徑（參看圖 8 (b)），並假定 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 的長都已知，他證明如何求 $\overline{BC}$ 的長。因爲 $\overline{BD}$ 是 $\widehat{AB}$ 的互補弧所張之弦，$\overline{CD}$ 是 $\widehat{AC}$ 之互補弧所張之弦。於是，當 $\overline{AB}$，$\overline{AC}$（以及 $\overline{AD}$）之長都已知時，$\overline{BD}$ 與 $\overline{CD}$ 之長可利用前面所介紹的方法求出，於是，依 Ptolemy 定理，

$$\overline{BC}=\frac{1}{\overline{AD}}(\overline{AC}\times\overline{BD}-\overline{AB}\times\overline{CD})。$$

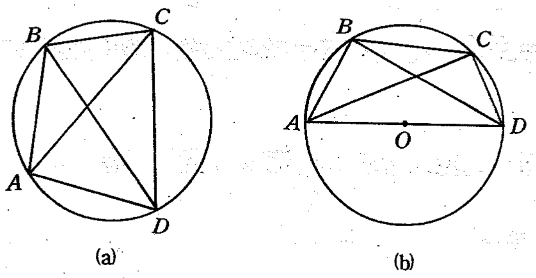

圖 8

這個等式的意義是：當兩弧所張之弦長已知時，這兩弧之差所張的弦長也可求出。以近代三角的符號表示是這樣的：

$$\overline{BC} = 120 \sin \frac{1}{2} \widehat{BC}$$

$$= 120 \sin \frac{1}{2} ( \widehat{AC} - \widehat{AB} )\text{，}$$

$$\overline{AC} = 120 \sin \frac{1}{2} \widehat{AC}\text{，}$$

$$\overline{BD} = 120 \cos \frac{1}{2} \widehat{AB}\text{，}$$

$$\overline{AB} = 120 \sin \frac{1}{2} \widehat{AB}\text{，}$$

$$\overline{CD} = 120 \cos \frac{1}{2} \widehat{AC}\text{，}$$

因此，Ptolemy 的等式變成

$$\sin \frac{1}{2} ( \widehat{AC} - \widehat{AB} ) = \sin \frac{1}{2} \widehat{AC} \times \cos \frac{1}{2} \widehat{AB} - \sin \frac{1}{2} \widehat{AB} \times \cos \frac{1}{2} \widehat{AC}\text{，}$$

這就是現在三角學中正弦函數的差角公式。同理，可得正弦函數的和角公式以及餘弦函數的和角、差角公式。因此，這四個公式通稱為 Ptolemy 公式。於是，Ptolemy 由 72° 弧與 60° 弧計算了 12° 弧所張之弦長。

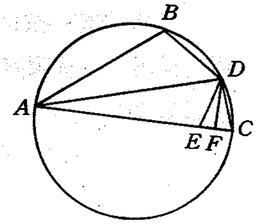

圖 9

其次，Ptolemy 又討論已知弦所對之弧的一半所張之弦長。他的求法是這樣的：設 $D$ 為 $\widehat{BC}$ 之中點，$\overline{BC}$ 為已知，過 $C$ 作直徑 $\overline{AC}$，在 $\overline{AC}$ 上取一點 $E$，使得 $\overline{AB} = \overline{AE}$（參看右圖 9）。因為 $\triangle ADB$ 與 $\triangle ADE$ 全等，故 $\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{DC}$。設 $\overline{DF}$ 是等腰三角形 $\triangle CDE$ 的高，則

$$\overline{FC}=\frac{1}{2}\overline{CE}=\frac{1}{2}(\overline{AC}-\overline{AE})=\frac{1}{2}(\overline{AC}-\overline{AB}),$$

因爲$\overline{AB}$可由$\overline{BC}$求得，故$\overline{FC}$也可求得。再由直角三角形$ADC$與直角三角形$DFC$ 相似的事實，可得

$$\overline{DC}^2=\overline{AC}\times\overline{FC}=\frac{1}{2}\overline{AC}\times(\overline{AC}-\overline{AB}),$$

以近代三角學記號表示，則得

$$(120)^2\sin^2\frac{1}{2}\widehat{DC}=60\times(120-120\cos\frac{1}{2}\widehat{BC})$$

亦卽

$$\sin^2\frac{1}{4}\widehat{BC}=\frac{1}{2}(1-\cos\frac{1}{2}\widehat{BC}),$$

這就是正弦函數的半角公式。

有了正弦函數的差角公式及半角公式之後，Ptolemy 再進一步地由 72° 弧及 60° 弧求 12° 弧所張之弦長，然後求 6°，3°，$\frac{3^\circ}{2}$，$\frac{3^\circ}{4}$ 弧所張之弦長，上述最後兩數他所得的值是 1　34′15″ 及 0　47′8″，接著他以線性內插法求得 1° 弧所張的弦長爲 1　2′50″，再用半角公式求得$\frac{1^\circ}{2}$弧所張的弦長爲 0　31′25″，這個數值與正確值的比較是

$$\frac{31}{60}+\frac{25}{60^2}=0.5236\cdots,$$

$$120\sin\frac{1^\circ}{4}=0.526\cdots。$$

由$\frac{1^\circ}{2}$弧所張的弦長出發，Ptolemy 完成了數學史上被使用超過一千年的“弦長表”，這個表列出了所有$\frac{n^\circ}{2}$弧所張之弦長，其中，$1\leq n\leq 360$；（相當於 $\sin\frac{1^\circ}{4}$ 至 $\sin 90^\circ$ 的函數值表），這個表構成了 Almagest 第一卷的重要部分。

另外必須一提的是：在 Almagest 第十一卷中，Ptolemy 討論了球面三角形之邊長的求法，其中他得出了一些球面三角學上的公式，這些以近代三角學的記號表示就是：若球面三角形$\triangle ABC$ 中$\angle C$是直角，則

$$\sin\widehat{BC}=\sin\widehat{AB}\times\sin\angle A,$$
$$\tan\widehat{BC}=\sin\widehat{AC}\times\tan\angle A,$$
$$\cos\widehat{AB}=\cos\widehat{BC}\times\cos\widehat{AC},$$
$$\tan\widehat{AC}=\tan\widehat{AB}\times\cos\angle A,$$

不過，Ptolemy 並沒有將球面三角學作系統地探討，他只是證明了一些他解天文學問題時所需的定理而已。

三角學是因天文學的需要而產生，而因爲球面三角學才是天文學的一項重要工具，因此，球面三角學比平面三角學更早發展。儘管平面三角學對於測量問題頗爲有用，可是，像 Heron of Alexandria（紀元前 100 年至西元 100 年間）這些對測量問題特別感興趣的數學家也都是使用 Euclid 幾何學的方法來處理問題，例如，近代數學中習慣以三角學的方法來證明的 Heron 公式，Heron 本人就是以幾何方法證明的，所謂 Heron 公式，就是以三角形三邊長求其面積的公式：

$$\triangle ABC \text{ 的面積} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\text{，}$$

其中，$a=\overline{BC}$，$b=\overline{CA}$，$c=\overline{AB}$，而 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$。

## 四、印度與阿拉伯的三角學

印度人也像希臘人一樣，把三角學當成是天文學的工具，而較早期的著作是在西元 400 年左右完成的，稱爲 Sūrya Siddhānta（system of the sun）。儘管印度人確實從古希臘人吸取了三角學方面的知識，不過，他們却也有了改善。例如，Ptolemy 的三角學是以弦及其所張的圓心角間的函數關係爲基礎，可是，Siddhānta 的作者却改用弦長的一半與其所張之圓心角的一半間的對應關係來建立三角學的概念，以近代三角學的觀點來看，這項對應關係已經就是正弦函數了。因爲在半徑爲 $r$ 的圓中，若一弦所張的圓心角爲 $\theta$，則此弦之長的一半就是 $r\sin\frac{\theta}{2}$。在數學史上，Siddhānta 的最主要貢獻就是引進了正弦函數的概念。（古印度人在數學史上的另一件重大貢獻是發明了現在各國通用的印度—阿拉伯數字 1，2，3，4，5，6，7，8，9）。

另一部重要的印度數學著作是由西元五世紀印度數學家 Aryabhata 在西元 490 年所著的 Aryabhatiya，在印度，這部著作的地位與 Euclid 的 Elements 在希臘的地位頗爲相似。在這部著作裡，圓的半徑定爲 3438，而圓周長爲 21600，由此求出 $3\frac{3}{4}^{\circ}$ 及其整數倍之角（由 $3\frac{3}{4}^{\circ}$ 至 $90^{\circ}$ 共有 24 個）的正弦，當時，Aryabhata 稱其爲 jyā，這是正弦（sine）這個名詞的最原始名稱。$3\frac{3}{4}^{\circ}$ 的 jyā，Aryabhata 定爲該角度所對應的弧長，即

$$21600\times\frac{3\frac{3}{4}}{360}=225$$

很有趣的是，根據現代的三角函數值表，

$$3438\sin 3\frac{3}{4}^{\circ} \doteq 3438\times 0.0654$$
$$=224.8452\text{。}$$

以現代的術語來說，當一個角很小時，其正弦值與其弧度值非常接近，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\text{。}$$

印度人似乎發現到這一點，而能找出225這個與 $3438\sin 3\frac{3^\circ}{4}$ 非常接近的值確實不容易。至於 $3\frac{3^\circ}{4}$ 的整數倍角的 jyā，Aryabhata 使用了下面這個方法：設 $s_n$ 表示 $n\times 3\frac{3^\circ}{4}$ 之 jyā，而 $S_n=s_1+s_2+\cdots+s_n$，則

$$s_{n+1}=s_n+s_1-\frac{S_n}{s_1}\quad\text{（※此式並不正確）。}$$

由此公式可算得24個角的 jyā，與現代數值比較，得

$$s_1=225,\qquad 3438\sin 3\frac{3^\circ}{4}\doteq 224.84,$$

$$s_2=449,\qquad 3438\sin 7\frac{1^\circ}{2}\doteq 448.72,$$

$$s_3=671,\qquad 3438\sin 11\frac{1^\circ}{4}\doteq 670.67,$$

$$s_4=890,\qquad 3438\sin 15^\circ\doteq 889.76\text{。}$$

顯見地，他所得的值與正確值已相當接近了。

除了正弦函數之外，Aryabhata 還引進正矢（versed sine）函數的概念（$\text{versin}\,\theta=1-\cos\theta$），這當然表示餘弦函數的概念也開始萌芽了。

Aryabhata 之後，在三角學上必須一提的印度數學家有 Varāhamihira（西元六世紀），Brahmagupta（西元七世紀），Bhāskara（西元十二世紀）。在西元505年 Varāhamihira 所著的 Pañca Siddhāntikā 中已有現代三角學中的兩個公式：

$$\sin^2\theta+\text{versin}^2\theta=4\sin^2\frac{\theta}{2},$$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}\text{。}$$

Brahmagupta 則在西元628年重新製作 Aryabhata 的正弦函數值表，其中，他把圓的半徑取為3270，而不是 Aryabhata 的 3438。此外，他推廣了 Heron 公式於四邊形的情形，他說：若一四邊形的四邊長為 $a$，$b$，$c$，$d$，而 $s$ 表示其周長的一半，則此四邊形的面積為

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}\text{。}$$

可惜這個公式只有在這個四邊形的對角互補時才成立。因為四邊形面積的正確公式是

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\alpha}\,,$$

其中，$\alpha$ 是此四邊形對角之和的一半。Bhāskara 是中世紀重要的印度數學中的最後一位，在被英國

征服之前，印度數學可以說在Bhāskara時達到最高峯。西元1150年，Bhāskara在他所著的Siddhānta Siromāni中，提出了一個方法製作出一個包含每個整數度的正弦函數值表。

Bhāskara死後，印度在數百年間沒有出現傑出的數學家（印度有名的天才Srinivasa Ramanujan是二十世紀時代的人，1887－1920）。最後，還得提出一點，印度史上在年代方面的不可信度很高，所以，有許多歷史人物的年代都應該闕疑，例如，印度有兩位數學家的名字都是Aryabhata，所以，對前面提到的那一位的年代，就有三種說法：西元三或四世紀，西元六世紀，西元八或九世紀。

附帶提一件有關Ramanujan的天才事蹟，以饗讀者。英國數學家Godfrey H. Hardy（1877－1947）有一次去醫院探視生病中的Ramanujan，Hardy告訴Ramanujan說，他到醫院時坐了一部車號很不好的計程車，這個號碼是1729，沒想到Ramanujan毫不思索就回答說，1729這個數其實很有趣，因爲它是有兩種方法表示成兩整數之立方和的全部正整數中最小的一個 —— $1729=1^3+12^3=9^3+10^3$。

阿拉伯人擅長於向被其征服的鄰國吸取知識，而其疆域又是百族並陳：敍利亞人、希臘人、埃及人、波斯人、土耳其人、及其他種族。因此，阿拉伯人在天文計算的方法上，原本分成兩派：其中之一是採用希臘人的弦函數，而另一派則採用印度人的正弦函數。雙方競爭的結果，印度派獲勝，因此，阿拉伯的三角學可以說是建立在正弦函數的基礎上；同時，印度的正弦函數也是靠阿拉伯人而傳至歐洲，在這個傳播的工作上，被譽爲巴格達的Ptolemy的阿拉伯天文學家Albategnius（858－929）是個主要的人物。在他所著的On the Motion of Stars一書中，Albategnius有過像下面這樣的公式，

$$b=\frac{a\sin(90^\circ-\theta)}{\sin\theta},$$

在公式中，他使用了正弦函數及正矢函數；不過，從這個公式中，我們可以看出當時的阿拉伯人已經有了正切與餘切函數的概念。一個世紀以後，到了Abû'l-Wefâ的時代，正割函數與餘割函數的概念也已經形成。在三角學的發展史上，Abû'l-Wefâ的重要成就之一是他着手於三角學的有系統探討：二倍角公式，半角公式都提出了證明；正弦定律雖然是Ptolemy已經了解，印度數學家Brahmagupta又作過探討，但是，由於Abû'l-Wefâ發現了球面三角形的正弦定律，因此，正弦定律通常是歸給Abû'l-Wefâ。此外，Abû'l-Wefâ還製作了一個$\frac{1^\circ}{4}$之整數倍角的八位數字正弦函數值表，同時，也製作了一個正切函數表。

平面及球面三角學被視爲一門獨立的科學來探討，而不再視爲天文學的一部分，是從波斯天文學家Nasir Eddin al-Tusi（1201－1274）開始，在他所著的Treatise on the Quadrilateral中，他介紹了解直角球面三角形的六個基本公式，及如何使用極三角形來解一般的三角形。可惜，他的著作沒有廣爲流傳，直到西元1450年才傳入歐洲。

Nasir Eddin之後，阿拉伯的數學趨於式微，再值得一提的只有Al-Kashi（西元十五世紀），那時撒馬爾罕王子Ulugh Beg（蒙古帖木兒汗的孫子）建了一座天文台，邀請了一批科學家從事觀察研究，Al-Kashi是其中的一人，他們重新製作了正弦及正切函數值表，對三角學的進展提供了不少貢獻。Al-Kashi的另一項成就是他在計算圓周率$\pi$值的卓越成果，他所求出的$\pi$值已經準確到

小數點以下十四位：

3.14159265358979…。

我國南北朝時代宋人祖冲之（429－500）所得的π值準確到小數點以下七位，即3.1415926…。不過，祖冲之比Al-Kashi早了約一千年。

## 五、三角學的發展成熟

Al-Kashi之後，阿拉伯人在數學上的輝煌時期結束，而原本在黑暗時代中的歐洲人在數學的研究方面開始嶄露頭角。首先，是大批的數學名著都逐步地由阿拉伯文（或直接由希臘文）翻譯成拉丁文。這其中，很重要的一位譯述者是Gherardo of Cremona（1114－1187），他在西元1175年把Ptolemy的名著Almagest譯成拉丁文，而使得Ptolemy的成就能傳入西方。在這部譯本中所用的名詞正是現代三角學中sine這個字的來源。 前面我們提過，印度人用 jyā 來表示弦的半長，傳入阿拉伯之後，阿拉伯人音譯而成 jiba，不過，在阿拉伯文中這是一個沒有意義的字，倒是 jaib這個字在阿拉伯文中是“環抱”的意思，因爲阿拉伯人有省略母音字母的習慣，於是，沒有意義的 jiba 省略母音字母後變成 jb，後人似乎很自然地誤會 jb是 jaib的簡寫。因此，當Gherardo of Cremona翻譯這部書時，就把 jaib譯成拉丁文中有“環抱”之意的 sinus，有時則使用更詳細的寫法 sinus rectus（vertical sine），而正矢則寫 sinus versus，留傳下來，sinus 成爲今日的 sine，而 sinus versus 成爲今日的 versed sine。

中世紀的意大利天才Fibonacci（1180－1250）熟習阿拉伯的三角學，他在西元1220年著有Practica Geometriae一書，開始把三角學應用於測量問題，對三角學的傳入歐洲及被廣泛使用，貢獻甚大。

十五世紀末葉至十六世紀初葉，進入文藝復興時期的歐洲，研究風氣興起，除了航海，曆法推算，及天文學等都需要三角學之外，還有一件震撼歐洲學術界的大事使得三角學的重要性大大地提高；這件大事就是波蘭天文學家Nicholas Copernicus（1473－1543）的“地動說”或是“以太陽爲中心”（heliocentric）的學說，這個結論不僅與聖經上所說不符，也與一般人所相信的學說相反，並且把已經流傳一千四百年的Ptolemy天文學推翻。 爲此，不僅教會視此學說爲異端邪說，歐洲學術界更爲此而發生激烈爭辯。但是，不論是贊成或反對他的學者，都必須從觀察天象及研究三角學方面，才能斷定它的正確與否，因此，三角學的研究乃因而成爲很重要的一環。

由於當時所流行的Almagest拉丁譯本是由阿拉伯文譯本轉譯而得，西元1460年維也納的天文學家George Peurbach（1423－1469）決定着手由該書的希臘文原本重譯成拉丁譯本，同時，還製作了一個更準確的三角函數值表。可惜，Peurbach早逝，他的工作遂由他的學生Regiomontanus（1436－1476）繼續完成。關於Regiomontanus，有件事值得一提，歷史學家通常把西羅馬帝國滅亡的西元476年至土耳其人攻破拜占庭帝國首都Constaninople的西元1453年稱爲中世紀(Midde Ages），不過，有些數學史家却認爲數學史上的中世紀應該是Justinian大帝關閉雅典的異教哲學院而令學者們星散的西元529年至西元1436年，在西元1436年阿拉伯數學家Al-Kashi逝世（不過，這個年代不是完全確定）而Regiomontanus在這一年出生。

在Regiomontanus的著作中，最具重要性的應是西元1464年所完成的De triangulis Omnimodis，此書對三角形的解法作了有系統的介紹。例如，在第一卷中，作者先利用Euclid的方法介紹有關比例的觀念，接著有五十多個命題介紹如何利用直角三角形的性質來解三角形。在第二卷中，首先對正弦定律作了清楚的介紹，然後討論如何由已知的條件求平面三角形的邊、角、及面積等。例如，當一三角形的一個邊、此邊的對角、及此邊上的高已知時，則這個三角形的其他要素都可求出。他也寫出了$\triangle=\frac{1}{2}bc\sin A$這個面積公式。第三卷討論球面上的幾何，而於第四卷中介紹球面三角學，其中包括了球面三角形的正弦定律以及餘弦定律：

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C},$$

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A。$$

Regiomontanus的另一部三角學著作是Tabulae directionum，正切函數及其性質是包括在這部書中，不過，他沒有用tangent來表示正切函數，而使用numerus。為了避免使用分數，在正弦函數值表中，Regiomontanus把半徑選成600000，或10000000或600000000，而在正切函數值表中，把半徑選成100000。

在Regiomontanus的著作出版後許多年中，學者們還為某些問題困惱著。這些問題如：由於在De triangulis一書中，作者只使用正弦及餘弦兩個函數，使得許多公式無法出現；又因當時負數還未被接受為一種數，使得鈍角的餘弦及正切值變成不能解釋等等。

Regiomontanus之後對三角學有貢獻的，應該先提到波蘭天文學家Nicholas Copernicus以及他的普魯士學生Georg Joachim Rhaeticus（1514－1576）。Copernicus在西元1530年完成了他那部震撼歐洲學術界的著作De revolutionibus orbium coelestium，此書中所介紹的三角學題材與Regiomontanus的De triangulis內容頗為相似，不過，因為後者是在西元1533年才出版，所以，當Copernicus著作他的名著時，他可能對Regiomontanus的作品還無所悉。但是，由於Rhaeticus在1539年成為Copernicus的學生之前，與Nuremberg（Regiomontanus的居住地）的數學界有所接觸，Copernicus在三角學方面的成果也可能因為Rhaeticus的關係而與Regiomontanus的成果發生一些關連。

Rhaeticus在接受了Regiomontanus及Copernicus的薰陶之下，，加上了自己的見解，寫成了Canon doctrinae triangulorum（1551年），在這部書中，作者對三角學中的正弦概念有一項革命性的改變。過去，正弦一直被看成是弧的函數，可是，Rhaeticus把正弦看成是角的函數，換言之，在圖10中，過去都把$\overline{AB}$視為$\widehat{AD}$的正弦，可是，Rhaeticus則把$\overline{AB}$看成是$\angle AOB$的正弦。由此，他把六個三角函數都看成由直角三角形的邊長之比值來定義了。另一方面，Rhaeticus為六個三角函數都製作成函數值表，而且他最先使用只列出0°到45°的函數值表的方法，而由45°到90°之三角函數值則由其餘函數之值來

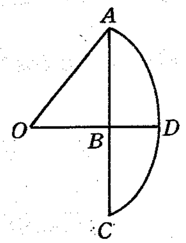


圖10

計算。此外，他求出了以 $\sin\theta$，$\sin(n-1)\theta$，$\cos(n-2)\theta$ 來表示 $\cos n\theta$ 的公式：

$$\cos n\theta=\cos(n-2)\theta-2\sin\theta\sin(n-1)\theta 。$$

Rhaeticus 之後，在三角學方面貢獻甚大的是法國業餘數學家 Francois Vieta (1540－1603)。Vieta 是一位法律工作者，他只是利用閒暇的時間研究數學，不過，後世却有人稱他爲「解析法三角學之父」。在三角學方面，他從學習 Regiomontanus 與 Rhaeticus 的作品開始，與前者相同地，他認爲三角學是數學中獨立的一支，而不是天文學的一部分；與後者相同地，他也不再強調圓中的弦之半長。在 1579 年的著作 Canon mathematicus 一書中，他製作了六個三角函數的函數值表，其中以分爲單位。不過，除了 sinus (sine) 這個名詞之外，cosine，tangent，cotangent，secant，cosecant 這五個名詞他都沒有使用。

在 Canon mathematicus 一書中，他對平面及球面三角形的計算作了有系統的介紹，並介紹了如何將一般三角形分割成直角三角形來處理的方法。同時，此書中還提出了一個相當於現代三角學中之正切定律的定理。所謂正切定律，即

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)} 。$$

雖然 Vieta 可能是最先使用這個定律的人，但是，這個定律最早却出現在丹麥數學家 Thomas Finke 的著作 Geometria rotundi (1583年) 之中。

在球面三角形中，Vieta 提出了另一個餘弦定律：

$$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a 。$$

此外，他還提出了和差化積的公式：

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} 。$$

在他 1615 年的另一部著作 Sectiones Angulares 中，他提出了如何以 $\sin\theta$ 與 $\cos\theta$ 表出 $\sin n\theta$ 與 $\cos n\theta$ 的公式：

$$\sin n\theta=n\cos^{n-1}\theta\sin\theta-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta+\cdots,$$

$$\cos n\theta=\cos^n\theta-\frac{n(n-1)}{1\cdot2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\cdots 。$$

這兩個等式利用數學歸納法自然很容易驗證，不過，Vieta 却是利用下面這個等式以及直角三角形作一番巧妙的處理而得上面的結果：

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ad+bc)^2+(ac-bd)^2=(ad-bc)^2+(ac+bd)^2 。$$

前面有關 $\sin n\theta$ 的展開式，還曾使 Vieta 在比利時人面前露了一次臉，事情是這樣的：1593年

比利時數學家Adrianus Romanus（1561－1615）曾經寫出下面這個四十五次方程式，公開向人挑戰，要求其解：

$$x^{45}-45x^{43}+945x^{41}-\cdots-3795x^{3}+45x=K。$$

比利時駐法國的大使在法皇亨利四世的朝廷上吹牛說：法國一定沒有人能解出這個問題。於是，法皇召見Vieta，要他出面維護法國人的榮譽。Vieta發現：若把$K$取爲$\sin 45\theta$，則$x=\sin\theta$就是上述方程式的一個解。由此而得出這個方程式的23個正根。Romanus大爲佩服，還親自去拜訪Vieta。後來，Vieta在他1595年的著作Responsum還解說了他的求解方法。

Vieta的倍角公式應該已經能指出這些函數的週期性的，不過，可能是由於負數還未被接受，所以，當時的數學家沒對這方面再作深入的探討。

十六世紀末葉至十七世紀初葉，三角學的探討引起了許多數學家的興趣，我們舉出一些例子：

西元1595年，德國業餘數學家Bartholomaus Pitiscus（1561－1613）有一部著作，在其中他修改Rhaeticus的三角函數表，而其書名就是Trigonometry（三角學），這是這個字第一次被用於書名。

西元1619年，發明對數的蘇格蘭業餘數學家John Napier（1550－1617）在他的著作Constructio中提出了一個記憶直角球面三角形中十個公式的一套絕招。這十個公式是這樣的：設球面三角形$ABC$中，$\angle C=90°$，而$a=\widehat{BC}$，$b=\widehat{AC}$，$c=\widehat{AB}$，則

(1) $\cos c=\cos a\cos b$，

(2) $\sin a=\sin c\sin A$，

(3) $\sin b=\sin c\sin B$，

(4) $\cos A=\sin B\cos a$，

(5) $\cos B=\sin A\cos b$，

(6) $\cos c=\cot A\cot B$，

(7) $\sin a=\tan b\cot B$，

(8) $\sin b=\tan a\cot A$，

(9) $\cos A=\tan b\cot c$，

(10) $\cos B=\tan a\cot c$。

有了這十個公式之後，只要在$A$，$B$，$a$，$b$，$c$等五個量中，知道其中兩個，則其餘三個都可以求出來。

這些公式固然已經非常完滿，可是，硬記是不行的。Napier創出一套絕招如下：將下左圖中除了$C$外的五個量，按其位置作成一圈（參看下右圖），並把斜邊上的三個量改用其餘角$\overline{A}=90°-A$，$\overline{B}=90°-B$，$\overline{c}=90°-c$。任取其中一個量，如$\overline{A}$，作爲中間部（middle part），則與$\overline{A}$相鄰的兩個量$b$，$\overline{c}$，稱爲相鄰部（adjacent parts）；與其不相鄰的兩個量$\overline{B}$，$a$稱爲相對部（opposite parts）。Napier的記憶法則就是下面這個公式

$$\begin{aligned}\sin(\text{中間部})&=\tan(\text{相鄰部})\text{的乘積}\\&=\cos(\text{相對部})\text{的乘積。}\end{aligned}$$

例如，以$\overline{A}$爲中間部時，即得

$$\sin(90^\circ - A) = \tan b \tan(90^\circ - c)$$
$$= \cos(90^\circ - B)\cos a,$$

亦即

$$\cos A = \tan b \cot c,$$
$$\cos A = \sin B \cos a,$$

亦即上面的(9)與(4)兩等式。至於 sin —— 中間部， tan —— 相鄰部， cos —— 相對部這三個對應關係，還有一個記法； sin 中有 i ，中間部（ midde part ）中也有 i ； tan 中有 a ，相鄰部（ adjacent parts ）中也有 a ； cos 中有 o ，相對部（ opposite parts ）中也有 o 。

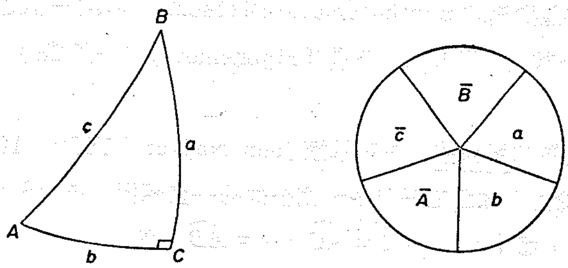


圖 11

西元1626年，荷蘭數學家 Albert Girard（1595－1632）在1626年有一部關於三角學的著作，在其中，他最先把 sine，tangent，secant 等字簡記爲 sin，tan，sec；而且還提出了利用球面三角形的三個內角求其面積的公式：設$\triangle ABC$爲一球面三角形，則其面積爲

$$\pi r^2 \frac{A+B+C-180^\circ}{180^\circ},$$

其中 $r$ 是包含這個球面三角形的球面之半徑。讀者請注意，球面三角形的三個內角之和大於 $180^\circ$。

英國數學家 John Wallis（1616－1703）在三角學上的最大貢獻是將三角函數的定義由直角三角形邊長之比值改成方程式及級數的方法，這種定義方法對解析三角學的誕生貢獻甚大。

英國數學家 Isaac Newton（1642－1727）首先將 $\sin x$ 及 $\sin^{-1} x$ 展開成無窮級數：

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in \boldsymbol{R},$$

$$\sin^{-1} x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 \leq x \leq 1。$$

英國數學家 James Gregory（1638－1675）最先把 $\tan^{-1} x$ 展成無窮級數：

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad -1 < x < 1。$$

十八世紀以後，數學家開始把三角函數與虛數及對數結合，1702年，瑞士數學家 Jean I

Bernoulli（1667－1748）發現了反三角函數與複數之對數的關係。1714年，Roger Cotes（1682－1716）提出了這個關係式：

$$\theta i=\log(\cos\theta+i\sin\theta)。$$

1707年法國數學家Abraham de Moivre（1667－1754）在他的著作Philosophical Transactions 中提出了下面這個關係式

$$\cos\theta=\frac{1}{2}(\cos n\theta+\sqrt{-1}\sin n\theta)^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{2}(\cos n\theta-\sqrt{-1}\sin n\theta)^{\frac{1}{n}},$$

這個關係式自然與著名的De Moivre定理

$$(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\sqrt{-1}\sin n\theta$$

有著密切的關係。1748年瑞士數學家Leonhard Euler（1707－1783）在他的著作 Introductio in Analysin infinitorum中提出一個更爲簡潔有用的關係式

$$e^{\sqrt{-1}x}=\cos x+\sqrt{-1}\sin x，$$

利用這個關係，Cotes與De Moivre的結果就變得更爲清楚了。1777年，Euler把$\sqrt{-1}$記爲$i$，則根據上面的Euler等式，可得

$$e^{\pi i}+1=0，$$

這個式子被認爲是最了不起的等式，因爲它把數學上最重要的五個數：0，1，$i$，$\pi$，$e$ 都包含在內，而且還包含三個最基本的運算：加法，乘法，及指數。

至此，三角函數不僅完全擺脫了天文學而成爲數學上一個獨立的分支，同時，又因爲它與數學上其他分支的緊密關係，使得它成爲今日數學上一個基本而有用的工具。 □

## 參考書目


1. Bell , E. T., The development of mathematics, McGraw Hill, 1945, 2nd edition.
2. Boyer, C. B., A history of mathematics, 1968.
3. Eves, H., An introduction to the history of mathematics, Rinehart and company Inc., 1953.
4. Kline, M., Mathematical thought from ancient to modern times, Oxford Univereity Press, 1972.
5. Smith, D. E., History of mathematics, vols. 1 and 2, Dover Publication, Inc., 1953.