鷄蛋是怎樣站立的？

蘇賢錫
國立臺灣師範大學物理系

一、倒立陀螺

爲了紀念創立 75 週年，美國物理學會曾經發行 1974 年度月曆，每月份都刊載著名物理學家的照片。其中有一張是波爾（Niels Bohr，1885-1962）與鮑立（Wolfgang Pauli，1901-1958）正在玩耍倒立陀螺的照片。不知這是何時拍攝的，但是根據伽毛（George Gamow）的漫畫，波爾迷上倒立的陀螺，可能是在 1929 年左右的事。伽毛曾經把波爾畫成米老鼠，用漫畫來描述波爾的成就。

直徑 3～4 cm 的球體，將其切去一部分，再加上一柄，這就是倒立陀螺。把這陀螺放在平面上，用手指夾住柄來旋轉，柄就逐漸傾斜，終於柄在下方，倒立轉動。陀螺一直穩定倒立轉動，直到精疲力盡而倒下爲止。柄朝上的轉動，爲什麼不穩定，而倒立起來？這個力學問題，可以由動力學方程式開始加以分析。但是，本文並不打算涉及這種分析，而只根據下列經驗定律（或假設），亦即「轉動中的物體，其重心較高時比較穩定」。不在轉動的物體，其重心較低時比較穩定，這兩種情形完全相反，頗爲有趣。爲了說明這條經驗定律，有人搬出能量均分定律，認爲一般運動都是朝向實現能量均分的方向進行。在陀螺的例中，因倒立而使一部分轉動動能變成位能，這狀態比較接近能量均分的情況，所以這時的運動也就比較穩定。不管這種說法對不對，物體轉動時，其重心較高時比較穩定，這個經驗定律似乎是正確的。例如，在硬幣的邊緣附近挖一個洞，將這硬幣旋轉，則在達到穩定轉動狀態時，洞在下方，表示重心升高。反之，硬幣上不挖洞，而在邊緣附近加上一塊黏土，將這硬幣旋轉，則在達到穩定轉動狀態時，黏土在上方，再度表示重心升高。這些例子都是顯示，重心較高時的轉動比較穩定。現在，暫且根據這條經驗定律，來探討煮蛋站立的情形。

二、站立的煮蛋

可能很多人知道，將煮蛋平放在桌上，用力旋轉，則起初橫臥轉動的煮蛋，慢慢站起來，終於直立穩定地轉動。因爲站立時的重心較橫臥時爲高，所以直立轉動始爲穩定。問題在於，轉動時是鷄蛋的尖端在上方呢？還是扁端在上方？可能有人會這樣想，扁端較重，重心偏向扁端，所以轉動時扁端在上方。但是，眞正用力旋轉煮蛋時，結果並非如此。不管使用何種鷄蛋，在轉動時，幾乎都是尖端在上方。爲什麼？截至目前，大家認爲理由如下：只要吃過煮蛋的人，誰都知道，鷄蛋裏面有裝了空氣的氣室。其實，由於氣室在鷄蛋的扁端，重心是偏向尖端的，完全與外觀相反。因此，煮蛋轉動時，尖端在上方。這就是大家公認的解釋。重心偏向尖端這項事實，又可以下列實驗來證明。讓鷄蛋輕浮在比重與鷄蛋略同的鹽水中，則扁端浮在水面上，因而可以證明，重心偏向另外一個尖端。然而，這種證明方法是不是可以令人心服口服？

上面的說明，看來簡單明瞭，毫無疑問的餘地，但是眞正旋轉煮蛋時，常常遇到幾種現象，

與這種說明似乎互相矛盾。

由橫放狀態開始，用力旋轉羨蛋，則羨蛋轉動時，尖端在上方。然則，一開始就令鷄蛋直立旋轉，將會發生何事？事實上，從直立狀態旋轉時，無法施力於鷄蛋，不能快速轉動。然而，反覆再三嚐試之後，偶而會轉動得很好。用這種轉法來讓鷄蛋轉動，則扁端在上方時較尖端在上方時，轉動得更穩定，尤其是新鮮的鷄蛋，這種傾向更加顯著。將鷄蛋橫放下來旋轉至鷄蛋站立時，確實尖端在上方。但是，一開始就令鷄蛋直立起來旋轉時，反而尖端在下方較爲穩定，這是不是有點奇怪？

把羨蛋放在鹽水中求得的重心位置，嚴格說起來，它是「浮心」。利用下述方法來測定重心，便知重心幾乎都在鷄蛋中心（對稱軸的中點）附近。新鮮的鷄蛋，其重心顯然偏向扁端。雖然如此，橫放這種鷄蛋來旋轉而使它站立時，扁端在下方。這是什麼道理？先來看看鷄蛋的一些性質以後，再來說明這個道理。

三、鷄蛋的重心位置

市面上出售的大多數鷄蛋，其重量與大小都差不多，幾乎沒有個別差異。但是，在養鷄場一看裝着新生蛋的籃子，便知其大小形狀千差萬別，令人覺得鷄蛋的形狀不容易下定義。有的鷄蛋很長，有的卻是粗而短，有的甚至無法區別其尖端與扁端，幾近橢圓體。然而，根據我們日常生活的經驗，鷄蛋的尖端與扁端都能辨別，一般鷄蛋都是所謂「鷄蛋形」（見圖1）。以下，爲了便於說明，鷄蛋上的幾個特殊點，分別給以記號。首先，假設一軸通過重心，鷄蛋對這軸成爲對稱，而這軸稱爲對稱軸。設對稱軸與尖端及扁端的交點，分別爲P與Q，而線段$\overline{PQ}$的中點爲中心O。通過中心O，與對稱軸正交的面與鷄蛋外殼所交的圓，稱爲中心圓A。將鷄蛋橫放在平面上，用手支持，令對稱軸平行於平面，則鷄蛋與平面接觸在一點M，如圖1所示。通過M點，與對稱軸

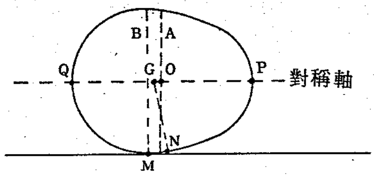

圖 1

正交的面與鷄蛋外殼所交的圓，稱爲最大半徑圓B。顯然，M點在鷄蛋上最粗的部分。其次，將手移開，不予支持，則鷄蛋隨即傾斜而靜止在平面上。這時，鷄蛋的重心G點最低。設這時鷄蛋與平面的接觸點爲N，則通過N的垂線與對稱軸的交點即爲重心G。只要把鷄蛋輕放在桌面，便知N點的位置較中心圓A靠近P點。

然則，重心G的位置，在對稱軸上的何處？在中心O的P側，抑或Q側？下列是求出重心位置G的兩種方法。

第一種方法非常幼稚，將羨蛋沿中心圓而切成兩個部分，再比較這兩個部分的重量。如果含有Q點的扁端較重，則重心應該在中心O的Q側，而如果尖端較重，則適相反。然而，實際上無法沿着中心圓而將鷄蛋準確地切成兩個部分，一般而言，切口到P點的距離ℓ_P與切口到Q點的距離ℓ_Q並不相等。於是，設尖端部分的重量爲W_P，扁端部分的重量爲W_Q，以便同時測定這些距離與重量。表1顯示，就四個鷄蛋所測定的結果。No. 2是$W_Q > W_P$而$\ell_Q > \ell_P$，No. 3是$W_P > W_Q$而$\ell_P > \ell_Q$，表示兩者都是距離長的較重。重量的差別，或許因爲切法技巧不夠高明所致，所以這兩個情形無法令人判斷重心偏向何方。然而，No. 1與No. 4都是$\ell_Q < \ell_P$，卻是$W_Q > W_P$，這就表示重心偏向扁端。

表1 切成兩個部分的長度與重量

鷄蛋	ℓ_P(cm),	W_P(g)	ℓ_Q(cm),	W_Q(g)
No. 1	3.07	34.08	2.92	36.31
No. 2	2.88	27.70	2.98	31.13
No. 3	2.71	24.26	2.61	23.71
No. 4	2.79	25.54	2.74	26.74

表1所用的材料是新鮮鷄蛋(產後一兩天的鷄蛋)。由於新鮮鷄蛋的氣室較小，表列的結果，可能是理所當然的。在超級市場購買的鷄蛋，鮮度較差，氣室變大，所以不能利用上列實驗方法，來判斷重心G的位置究竟在對稱軸上偏向中心O的何方。

求出重心的第二種方法是，利用下列事實：鷄蛋靜止在平面上時，其重心在於接觸點N的上方。因此，首先固定鷄蛋的兩個頂點P與Q，一面緩慢旋轉鷄蛋，一面用鉛筆在外殼上畫中心圓。其次，將鷄蛋放在平面上，由對稱軸的垂直方向望過去，看看垂直於平面而且通過接觸點N的直線，究竟經過鷄蛋的何處？事實上，眞正在觀察的時候，由於鷄蛋的曲率半徑頗大，接觸點看起來不像一點，而成爲寬度3～5 mm的接觸帶。將兩塊三角板立在接觸帶的兩端，就比較容易求出通過該帶中點N的垂線。結果顯示，新鮮鷄蛋的重心依然由中心O偏向扁端。鮮度較差的鷄蛋，其重心大約在中心O處。

雖然辛辛苦苦求出重心，但是，實際上，無論重心在對稱軸上的何處，只要用力旋轉煮蛋，當它站立起來時，尖端總是在上方。換言之，重心的位置不大重要。

四、隨意站立的鷄蛋

然則，轉動的煮蛋，站立時爲何必須尖端在上方？下列兩點，可能是主要原因。第一、鷄蛋輕放在桌上時，鷄蛋與桌面之間的接觸點N，一定(幾乎可以肯定地說)較中心圓A偏向尖端(亦即P點)；第二、把鷄蛋支持在桌面上，將要旋轉時，對稱軸與桌面，通常略成平行。由於這兩點原因，鷄蛋站立時，尖端在上方。其理由非常簡單：從圖1的狀態，用力旋轉鷄蛋，則鷄蛋欲將其重心抬高。假如想要把扁端擧高，則鷄蛋與平面的接觸點須先移動到圖中的N點，而重心反而降低。然而，假如想要把尖端擧高，則重心自然升高，而與我們的經驗定律不發生矛盾。因此，由圖1的姿勢來旋轉鷄蛋使其站立時，尖端在上方。在旋轉時，通常都是維持對稱軸約略平行於桌面，所以轉動時扁端不會在上方。然而，起初如果鷄蛋與桌面之間的接觸點較N點靠近P側，則站立時尖端在下方，與平常情形完全相反。換言之，只要起始條件合適，可令煮蛋的任意一端在上方。由此可見，與其考慮重心的位置，不如設法安排外殼上的N點，使重心位置保持最低，較爲重要。

五、再談倒立陀螺

以上是根據「轉動中的物體，其重心較高時比較穩定」這條經驗定律，來研討鷄蛋站立的問題，下面將以倒立陀螺爲例，來討論這條經驗定律。

我們有時看到不完全的倒立陀螺，其形狀完全與倒立陀螺相同，却是旋轉之後不能倒立。不倒立起來的理由，亦即，它與普通倒立陀螺的差異，不難理解。首先，使陀螺柄與桌面接觸，慢慢將手移開(見圖2(a))。如果它是倒立陀螺，因爲這是不穩定的姿勢，所以它會立刻轉過來站立，陀螺柄在上方，如圖2(b)所示。這是由於(b)的姿勢時重心最低的緣故。這種陀螺經過旋轉後，陀螺柄立即傾斜，隨即倒立起來。至於不倒立的陀螺，繼續保持(a)的姿勢，一動不動。這時，(a)與(b)的兩種姿勢之間，一定有一種姿勢，其重心

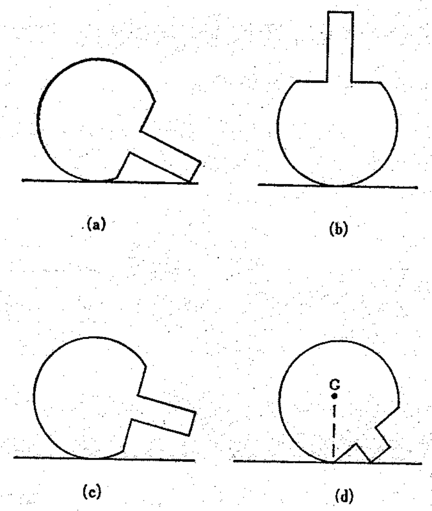

圖 2

位置最高。這種陀螺，縱然令其柄在上方而轉動，它也不會完全倒立起來，只是維持圖 2 (c)的姿勢而作穩定的轉動。假如陀螺在穩定轉動時，陀螺的外面與桌面接觸的位置，恰好使陀螺的重心位置最高，則完全符合我們的經驗定律。然而，實際測定的結果顯示，通過接觸點的垂線，並不通過重心，相距 1～2 mm 。這項出入，就我們的定性討論而言，可謂甚小，不必計較。換言之，不完全的倒立陀螺，似乎證明我們所用的經驗定律之正確性。

此處必須注意，與普通的倒立陀螺一樣，這種不完全倒立陀螺的柄在下方時，其重心位置最高而最穩定。因此，如果一開始就保持陀螺柄在下方而予以旋轉，它就倒立作穩定的轉動。反之，如果一開始就保持陀螺柄在上方而予以旋轉，柄就逐漸傾斜，終於變成圖 2 (c)的姿勢而繼續作穩定的轉動，絕不變成重心最高的姿勢——倒立。因爲若要倒立起來，它必須先把重心降低。我們的不完全倒立陀螺，其重心位置在圖 2 (c)的姿勢時最高，乃是因爲陀螺的曲率不等，與眞正球形有些出入之故。

看到這種不完全倒立陀螺之後，我們可以想到下列實驗。將倒立陀螺的柄切短，終於可使重心在邊緣上方，如圖 2 (d)所示，而且柄端與桌面接觸。這時的柄長，暫且稱爲臨界長度。倘若陀螺的柄長等於或大於臨界長度，則從柄在上方的狀態，經過傾斜狀態，至於柄在下方的倒立狀態爲止，重心一直上升。因此，只要加以適當的旋轉，陀螺就會倒立起來。普通的倒立陀螺都是如此。然而，倘若柄長小於臨界長度，縱然柄在下方的狀態時，其重心最高，但是從重心在邊緣上方的姿勢轉移到柄端接觸桌面的姿勢之間，重心略微下降，因而陀螺不能變成完全倒立的狀態，它可能保持邊緣接觸桌面的狀態而轉動。事實上，實驗的結果大致上證明這種推理是正確的。爲什麼是「大致上」呢？因爲利用直徑 3 cm 的木製陀螺所作的實驗顯示，縱使柄長較臨界長度短 2 mm ，陀螺也倒立起來了。然而，柄長較臨界長度短 3 mm 時，陀螺不會變成柄在下方的倒立狀態，而保持邊緣接觸桌面的狀態，繼續作穩定轉動。如果令陀螺的邊緣與桌面接觸，移動其柄 2～3 mm 時，重心移動的垂直距離甚小。因此，這項實驗可謂證明了經驗定律：「轉動中的物體，其重心較高時比較穩定。」

六、結　　語

經驗定律中，並沒有說「重心最高時最穩定」，這一點非常高明。如果說是使重心最高的姿勢，那麼煮蛋轉動時，扁端必須在上方。但是，使重心升高時，尖端似乎也可以在上方。根據上述的討論，我們的經驗定律可以補充說成：從起始條件出發，使重心升高的姿勢，或不使重心降低的姿勢，其轉動方爲穩定。換言之，忽視起始條件而使重心升高或降低，這是不可能的，這點必須再三強調。

令鷄蛋浮在鹽水中的實驗，可以應用到日常生活來辨別鷄蛋（生蛋）的鮮度，而不必打破鷄蛋。根據實驗，將鷄蛋置於10％（重量百分比）的鹽水中，如果沉在水底而橫臥下來的，其鮮度最高。不新鮮的鷄蛋在鹽水中保持傾斜狀態，更不新鮮的就直立，至於浮起來的，其鮮度最差。因爲鷄蛋一不新鮮，氣室就變大。同時，鷄蛋的成份也發生變化，所以產生這種傾向。這項實驗雖然簡單，卻是饒有趣味。□

（取材自「數理科學」1981年1月號）

符號探源

勇清

數學上有許多符號是大家所耳熟能詳的，例如：加、減、乘、除、等號、根號、小數點、大於、與小於等，這些符號是誰發明的呢？

加號“＋”、減號“－”、以及根號“$\sqrt{\quad}$”，這三個符號都是德國數學家Michael Stifel（1487－1567）所最先使用的，他第一次引用這些符號是在西元1544年。在此之前，西洋人都是以拉丁字plus、意大利字piu、或字母p來表示加法；而以minus、mene、或m表示減法；至於方根，則以字母R表示，例如，$R_3 8=2$ 表示2是8的立方根。

乘號“×”是英國數學家William Oughtred（1575－1660）在他1631年的著作Clavis Mathematicae中所最先使用的。

除號“÷”是英國數學家John Pell（1610－1685）所最先使用的。至於比例記號“：”，則是Gottfried Leibniz（1646－1716）最先使用的。

等號“＝”是英國數學家Robert Recorde（1510－1558）在他1557年的著作Whetstone of Wit中最先使用的。

大於“＞”與小於“＜”這兩個符號，是英國數學家Thomas Harriot（1560－1621）所最先使用的。

小數點是蘇格蘭數學家John Napier（1550－1617）最先使用的。

全等記號“≃”與相似記號“～”，是G. Leibniz最先使用的。

以 i 表示虛數單位 $\sqrt{-1}$，是Leonhard Euler（1707－1783）在西元1777年最先使用的。

將分數寫成 $\frac{a}{b}$ 的形式，是Leonardo Fibonacci（1170－1250）最先廣泛地使用，但 a/b 之形式則遲至1845年Augustus de Morgan（1806－1871）才提出來。