科學教育月刊　第45期　中華民國七十年（1981）

圓錐曲線發展史簡介

趙文敏

國立臺灣師範大學數學系

一、圓錐截痕的發現（Menaechmus）

圓錐曲線的探討，早在古希臘時代就已經開始。不過，後世的數學家們，並不能確定希臘數學家們是在什麼情況下發現圓錐曲線的。關於這一點，多數人認爲希臘數學家是因爲要探討“**倍立方問題**”才引出**圓錐曲線的概念**，因爲Hippocrates of Chios（紀元前五世紀）曾用下面這種方法來探討倍立方問題。

倍立方問題就是：利用圓規與直尺的幾何作圖法，能否作出一個正立方體，使其體積爲已知正立方體體積的兩倍？假設已知正立方體的邊長爲 a，則所欲求的正立方體的邊長必是 $\sqrt[3]{2}a$。那麼，這個問題能不能用古典的幾何作圖法來解決，完全在於：已知單位長的線段，能不能用古典的幾何作圖法作出長度爲 $\sqrt[3]{2}$ 的線段。這個問題已經在十九世紀經由Galois理論的代數方法證明不可能。不過，希臘數學家們還無法證明其不可能。因此，Hippocrates of Chios 認爲：若我們能求出兩個數 x 與 y，使得

$$x : a = y : x = 2a : y\ ,$$

則上面這個共同的比值就是 $\sqrt[3]{2}$。因此，若已知長度爲 a 的線段，而利用幾何作圖法可以作出長度爲 x 的線段。那麼，倍立方問題就可以解決了。爲了要考慮 x 與 y 值的求法，Hippocrates of Chios 考慮了下面這些聯立方程式

$$\begin{cases} x^2 = ay\ , \\ y^2 = 2ax\ , \\ xy = 2a^2\ , \end{cases}$$

在坐標平面上，前兩個方程式的圖形是拋物線，而後一個方程式的圖形是雙曲線。而所謂 x 與 y，乃是兩拋物線，或一拋物線與一雙曲線的交點坐標。因此，利用這種方法，由倍立方問題引出圓錐曲線的概念，是很自然的。

其後，Menaechmus（紀元前四世紀）根據Hippocrates of Chios 的想法，企圖以幾何方法來探討倍立方問題。於是，它利用平面截圓錐面而得出了拋物線、橢圓、與雙曲線。不過，Menaechmus 所介紹的方法與現代所常用的方法略有不同。他是利用三種不同的直圓錐面，而截平面則保持與錐面的母線垂直；當直圓錐面的頂角是直角時，則其截線是拋物線；當直圓錐面的頂角是銳角時，則其截線是橢圓；當直圓錐面的頂角是鈍角時，則其截線是雙曲線（的一支）。如下圖1所示：

圖 1

因此，Menaechmus 所發現的雙曲線還不是雙曲線的確實的形態。

為了要說明拋物線的概念如何用於倍立方問題，Menaechmus 指出，當一個頂角是直角的直圓錐面被一個與母線垂直的平面所截時，所得的截線以近代解析幾何表示時，其方程式必是 $y^2 = lx$ 之形式，其中的 l 是一個與截平面至頂點的距離有關的常數，後世數學家雖然不了解Menaechmus 如何導出這個性質。但是，這個性質是可以利用初等幾何學中一些定理導出的。不僅拋物線的情形如此，橢圓與雙曲線的情形亦如此。

二、Euclid與Archimedes

Menaechmus 之後，對圓錐曲線有過系統地探討的希臘數學家，先有 Aristaeus the Elder（紀元前四世紀），後有 Euclid（紀元前三世紀），前者著有 Elements of Conic Sections 五卷，後者著有 Conics 四卷，可惜，這些作品都已散失。不過，Euclid 的 Conics 大體上已被歸入 Apollonius 的著作 Conic Sections 八卷中的前三卷之中。在他的著作中，Euclid 仍然使用與Menaechmus 同樣的方法，依直角、銳角、鈍角直圓錐面分別截取拋物線、橢圓、雙曲線。

紀元前 300 年至紀元前 200 年這一百年間，通常被稱為是希臘數學的黃金時代。這段期間內最著名的三位數學家是 Euclid, Archimedes, Apollonius。被稱為是數學史上最偉大的三位數學家之一的Archimedes，有一份作品 Quadrature of the Parabola（拋物線的求積術），其中，他利用“窮盡法”計算拋物線之一段的面積。他的結果是這樣的：在圖 2 中，設 $APBQC$ 是拋物線的一段，則這個拋物線段與線段 $\overline{AC}$ 所圍之區域的面積等於 ΔABC 面積的 $\frac{4}{3}$ 倍，其中的 B 點是以 $\overline{AC}$ 為底時，該拋物線段的最高點（或者說，過 B 點的切線與 $\overline{AC}$ 平行）。這個性質利用積分的方法（Archimedes 的窮盡法通常被視為積分學的濫觴）證明，頗為簡單，我們介紹如下：設上述拋物線方程式為 $x^2 = 4cy$，而 A，

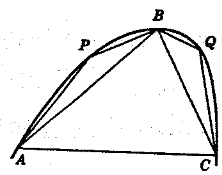


圖 2

C 的坐標分別為 $\left(x_1, \frac{x_1^2}{4c}\right)$ 與 $\left(x_2, \frac{x_2^2}{4c}\right)$，$x_2 < x_1$，則直線 AC 的方程式為 $(x_1 + x_2)x - 4cy - x_1x_2 = 0$，於是，所求的面積為

$$\int_{x_2}^{x_1}\left(\frac{x_1+x_2}{4c}x-\frac{x_1x_2}{4c}-\frac{x^2}{4c}\right)dx$$

$$=\frac{x_1+x_2}{8c}x^2-\frac{x_1x_2}{4c}x-\frac{1}{12c}x^3\Big|_{x_2}^{x_1}$$

$$=\frac{1}{24c}(x_1-x_2)^3。$$

另一方面，過拋物線上之點$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{(x_1+x_2)^2}{16c}\right)$的切線方程式爲$(x_1+x_2)x-4cy-\frac{(x_1+x_2)^2}{4}=0$。也就是說，上述的$B$點坐標爲$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{(x_1+x_2)^2}{16c}\right)$。於是，$\Delta ABC$的面積爲

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & \frac{x_1^2}{4c} & 1 \\ x_2 & \frac{x_2^2}{4c} & 1 \\ \frac{x_1+x_2}{2} & \frac{(x_1+x_2)^2}{16c} & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x_1x_2^2}{4c}+\frac{x_1^2(x_1+x_2)}{8c}+\frac{x_2(x_1+x_2)^2}{16c}\right.$$
$$\left.-\frac{x_2^2(x_1+x_2)}{8c}-\frac{x_1^2x_2}{4c}-\frac{x_1(x_1+x_2)^2}{16c}\right)$$

$$=\frac{1}{32c}(x_1-x_2)^3$$

顯然地，

$$\frac{1}{24c}(x_1-x_2)^3=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{32c}(x_1-x_2)^3，$$

這就是Archimedes的結果。

更進一步地，若在圖2中，過P，Q的切線分別與線段$\overline{AB}$，$\overline{AC}$平行，則依前面所得的結果，ΔABP與ΔBCQ面積之和爲

$$\frac{1}{32c}\left(x_1-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^3+\frac{1}{32c}\left(\frac{x_1+x_2}{2}-x_2\right)^3$$

$$=\frac{1}{128c}(x_1-x_2)^3$$

$$=\Delta ABC\text{面積的四分之一。}$$

事實上，Archimedes先證明ΔABP與ΔBCQ面積之和等於ΔABC面積的四分之一。然後，利用數學歸納法原理，可知拋物線段$APBQC$的面積爲

$$\Delta ABC\text{之面積}\times\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{4^n}+\cdots\cdots\right),$$

Archimedes 並沒有利用無窮等比級數的求和公式來計算上面的和，他是利用歸謬證法，證明上述的和既不能大於$\frac{4}{3}$，也不能小於$\frac{4}{3}$。

至於橢圓或雙曲線之一部分的面積，Archimedes 並沒有求出與拋物線之情形類似的結果。就積分學的觀點而言，計算拋物線段的面積只是利用了多項式的積分。但是，在橢圓及雙曲線的情形中，却必須利用超越函數的積分，當積分學的理論尚未發展成熟之時，自然是無法可想的。不過，在他的另一份重要著作On Conoids and Spheroids 中，Archimedes 已求得橢圓的面積公式πab，其中，a 與 b 分別是橢圓的長軸與短軸之長的一半。

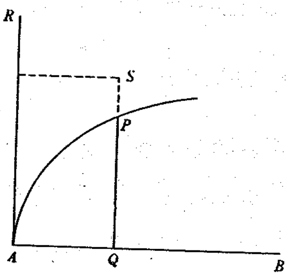
三、一代大師Apollonius

Apollonius（262B.C. — 190 B.C.）是一位傑出的數學家及天文學家，他的著作甚多，不過，失傳的也很多。他在幾何方面，尤其是圓錐曲線方面，有非常卓越的貢獻。在所著的Conic Sections 八卷中，他將前人的成果以及他本人的更多發現，彙集整理而成一部曠世巨著，就圓錐曲線的純幾何式探討而言，在Apollonius手上，已經大成，甚至可以說，後世數學家難以再有特殊的成就了。所以，不僅是他本人被譽爲古代的“偉大幾何學家”（the Great Geometer），而且有人讚譽他說，到Apollonius 爲止，古典的希臘幾何學已經到達了顛峯。

在八卷的Conic Sections 中，約有 400 個命題。其中的前四卷，整理了前人的成果並加以改進，至於後四卷，Apollonius 對圓錐曲線的性質作了深入的探討。這八卷著作中，第八卷業已失傳；而其前四卷，仍保有希臘文原本；第五至七卷，在西元1290 年被阿拉伯數學家Thabit ibn Qurra 譯成阿拉伯文，而在西元1710 年英國天文學家 Edmund Halley（1656 — 1742）將這七卷全部譯成拉丁文，自此以後，這部著作的各國文字譯本陸續出現了許多。

在Apollonius 之前，希臘數學家都以三種不同的直圓錐面來分別截出拋物線、橢圓、與雙曲線（的一支），但是，在Apollonius 的Conic Sections 第一卷中，他指出：只利用一個圓錐面（不論是直圓錐面或斜圓錐面），就可以依截平面的斜度之不同，而分別截出拋物線、橢圓、與雙曲線。他同時發現，雙曲線應該有兩支。

在第一卷中，Apollonius 第一次定出 parabola（拋物線）、ellipse（橢圓）、與 hyperbola（雙曲線）這三個名詞。在他以前，這三種曲線通常都以它們的來源來稱呼：拋物線稱爲直角圓錐的截痕（section of a right-angled cone），橢圓稱爲銳角圓錐的截痕，雙曲線稱爲鈍角圓錐的截痕。Apollonius 採用這些名詞，一方面是受到Archimedes 的影響，另一方面，則是根據 Pythagoras （紀元前六世紀）曾經引用的記號。若我們把一個長方形的底邊放置在一線段上，使長方形的一個頂點與線段的一個端點重合，當長方形的底邊比線段短，Pythagoras 稱這種情形爲 ellipsis （不足），當底邊與線段長度相同，Pythogoras 稱這種情形爲 parabole（相等），當底邊比線段長時，Pythagoras 稱這種情形爲 hyperbole（超出）。相等、不足、與超出等情形是如何與拋物線、橢圓、與雙曲線扯上關係的呢？我們解說如下：在下圖 3 中，弧 AP 是一圓錐曲線上的一段，A是它的一個頂點，而它的軸在直線AB 上（若是橢圓，則軸是指長軸；若是雙曲線，則軸是指貫軸），線段$\overline{PQ}$與$\overline{AB}$垂直於Q，$\overline{AR}$與$\overline{AB}$垂直於A，而且$\overline{AR}$ 之長等於該圓錐曲線的正焦弦長。若我們把$\overline{PQ}$ 延長至S，使得$\overline{AQ}\times\overline{QS}=\overline{PQ}^2$，則由$\overline{AQ}$，$\overline{QS}$ 所作成之長方形與線段$\overline{AR}$ 發生“不足”的現象時，這個圓錐曲線是橢圓；發生相等的現象時，是拋物線；發生超出的現象時，是雙曲線。事實上，若我們以直線AB爲x 軸，直線AR 爲y 軸，設 l 表示正焦弦長，則



(1) 設圓錐曲線是拋物線，則其方程式爲

$$y^2 = lx \ ,$$

即

$$\overline{PQ}^2 = l\cdot\overline{AQ}$$

$$\overline{QS}\times\overline{AQ}=\overline{AR}\times\overline{AQ}$$

$$\overline{QS}=\overline{AR} \ ,$$

因此，發生相等（ parabole ）的現象。

(2) 設圓錐曲線是橢圓，則其方程式爲

$$y^2 = lx = \frac{l}{2a}\ x^2 \ ,$$

其中，$2a$ 表示長軸之長。於是，

$$\overline{PQ}^2 = l\cdot\overline{AQ}-\frac{l}{2a}\cdot\overline{AQ}^2 < l\cdot\overline{AQ} \ ,$$

亦即

$$\overline{QS}\times\overline{AQ}<\overline{AR}\times\overline{AQ} \ ,$$

$$\overline{QS}<\overline{AR} \ ,$$

因此，發生不足（ ellipsis ）的現象。

(3) 設圓錐曲線是雙曲線，則其方程式爲

$$y^2 = lx + \frac{l}{2a}x^2 \ ,$$

其中，$2a$ 表示貫軸之長。於是，

$$\overline{PQ}^2 = l\cdot\overline{AQ}+\frac{l}{2a}\cdot\overline{AQ}^2 > l\cdot\overline{AQ} \ ,$$

亦即

$$\overline{QS}\times\overline{AQ}>\overline{AR}\times\overline{AQ} \ ,$$

$$\overline{QS}>\overline{AR} \ ,$$

因此，發生超出（ hyperbole ）的現象。

在Conic Sections 的第二卷中，Apollonius 介紹了雙曲線的漸近線以及共軛雙曲線，他不僅證明雙曲線上各點至漸近線的距離，因該點的愈趨遠離而愈小；同時，也證明雙曲線與其共軛雙曲線有相同的漸近線。

在第二卷中，Apollonius 還介紹了圓錐曲線的直徑，以及有心錐線（橢圓及雙曲線）的共軛直徑。所謂直徑，乃是指平行弦之中點的軌跡。利用下圖 4 中，與$\overline{PQ}$平行的所有弦之中點構成線段$\overline{AB}$，即$\overline{AB}$是一直徑。設d_1與d_2爲二直徑，若與d_2平行的所有弦中點的軌跡就是d_1，則稱d_1與d_2是一對共軛直徑。例如下圖 4 中，$\overline{AB}$與$\overline{DE}$是一對共軛直徑。根據這個定義，拋物線的直徑沒有共軛直徑。利用直徑與共軛直徑的觀念，他介紹了有心錐線的中心及二軸，以及拋物線的軸。

此外，在第二卷中，Apollonius 也介紹了圓錐曲線的切線。他證明：過直徑之一端點（此點必在圓錐曲線上）而平行於其共軛直徑的直線，就是過該端點的切線。同時，他還介紹了切線的作法：在下圖 5 中，Q是橢圓上一點，$\overline{AA'}$爲其長軸，N是Q在$\overline{AA'}$上的垂足，在直線$\overline{AA'}$上求出一點T，使得$\overline{AT} : \overline{A'T} = \overline{AN} : \overline{A'N}$，則直線$QT$就是過$T$的切線：

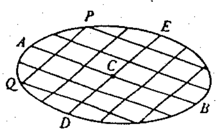


圖 4

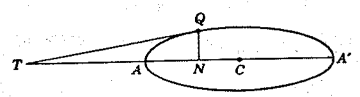


圖 5

至於過圓錐曲線外一點的切線，則其作法如下：設T爲圓錐曲線外一點，任作二直線，使與圓錐曲線相交於R，Q及R'，Q'，如下圖 6 所示，在$\overline{RQ}$上選取一點O，使得$\overline{TR} : \overline{TQ} = \overline{OR} : \overline{OQ}$，又在$\overline{R'Q'}$選取一點$O'$，使得$\overline{TR'} : \overline{TQ'} = \overline{OR'} : \overline{OQ'}$，設直線$OO'$與圓錐曲線交於$P$與$P'$，則直線$\overline{TP}$與$\overline{TP'}$就是過$T$點的兩切線：Apollonius所介紹的切線作法，只利用古典的幾何作圖法（圓規與直尺）就可作出。不過，Apollonius 卻沒有發現這一點：在所有的平面曲線中，只有圓、拋物線、橢圓與雙曲線，才能只利用圓規與直尺就可以作出過其上或其外任何一點的切線。

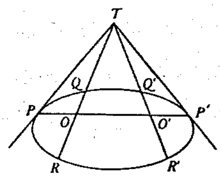


圖 6

在Conic Sections 的第三卷中，Apollonius 介紹了極點與極線。在右圖 6 中，若我們在線段$\overline{PP'}$上任選一點O''，設直線TO'與圓錐曲線交於Q''，R''，則恒有$\overline{TQ''} : \overline{TR''} = \overline{O''Q''} : \overline{O''R''}$，此時，$T$，$Q''$，$O''$，$R''$稱爲是一組調和分點，$O''$稱爲$T$對$Q''$，$R''$的調和共軛點，直線$PP'$稱爲是$T$點對該圓錐曲線的極線，而$T$點則稱爲是直線$PP'$對該圓錐曲線的極點。若$T$點在曲線上，則其極線就過$T$的切線。

在第三卷中，Apollonius 還介紹了有心錐線之焦點的性質。不過，焦點（ focus ）這個名稱還沒被採用。這些性質包括：橢圓上任一點至兩焦點的距離和是定數；雙曲線上任一點至兩焦點的距離差是定數；過有心錐線上任一點的切線，與該點至兩焦點之連線的夾角相等。不過，他沒有介紹拋物線

的焦點。

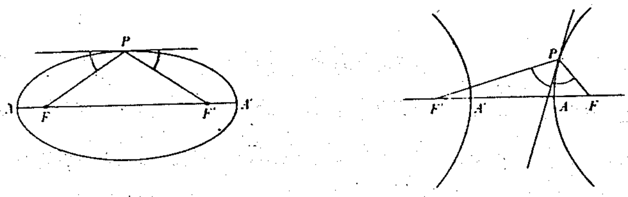


圖 7

很奇怪的是：在Conic Sections中，Apollonius 都沒有提到準線的觀念。有關圓錐曲線的焦點、準線性質，即：至一定點與一定直線之距離比爲定數的點所成之圖形是一圓錐曲線，這個性質記載在希臘最後一位重要幾何學家Pappus（西元三世紀）的著作Mathematical Collections第七卷之中，而且Pappus表示，這個性質Euclid已經提過了。

Apollonius在第三卷還提到一個很有名的問題：已知四直線，則平面上至此四直線之距離滿足 $pq=\alpha rs$ 的點之軌跡爲一二次曲線。其中 p，q，r，s 是該點至四直線的距離，而 α 爲一定數。這個性質利用解析幾何的方法來證明自然並不困難。這個問題，Euclid 曾提出了一部分解答。

在第四卷中，Apollonius進一步地討論極點與極線，並介紹如何利用極線的概念來作過圓錐曲線外一點的切線。

第四卷的另一部內容是討論圓錐曲線的交點問題，他證明了：兩圓錐曲線至多只有四個交點。

Conic Sections **第五卷的內容**是討論自已知點至已知圓錐曲線的極大與極小距離的問題。這個問題的探討自然地引出了法線的觀念。這是因爲圓錐曲線外任一點與該曲線上最近點或最遠點的連線必是該曲線的法線。Apollonius不僅介紹了過一已知點如何作法線，而且也說明了如何決定過一已知點的法線的數目。他這個決定的方法事實上已經引出了近代幾何中的漸屈線（evolute）觀念。例如，對拋物線 $y^2=2px$ 而言，Apollonius證明：過曲線 $27py^2=8(x-p)^3$ 右側的點都可以做 $y^2=2px$ 的三條法線；過 $27py^2=8(x-p)^3$ 上的點只有兩條法線，而過其左側的點則只有一條法線，前面所提的曲線 $27py^2=8(x-p)^3$ 就是拋物線 $y^2=2px$ 的漸屈線，

橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的漸屈線方程式是 $(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}$，

雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的漸屈線方程式是 $(ax)^{\frac{2}{3}}-(by)^{\frac{2}{3}}=(a^2+b^2)^{\frac{2}{3}}$。

不過，在Apollonius時代，解析幾何的觀念尚未成熟，因此，Apollonius只是指出有這條“分界線”存在，却沒有討論這條“分界線”是什麼形式。

在第六卷中，Apollonius討論圓錐曲線的全等與相似的問題，而且也介紹了一個方法：已知一圓錐曲線，如何作出一個直圓錐面，使得已知的圓錐曲線是這個直圓錐面的一個截痕。

第七卷中，Apollonius又回到共軛直徑的問題。例如，他證明了：過橢圓上一對共軛直徑的四個

端點分別作切線，這四條切線所圍成的平行四邊形之面積爲定數。這個定數自然就是長軸與短軸之長的乘積（因爲長軸與短軸是一對共軛直徑）。他又證明：在橢圓中，共軛直徑之長的和不超過長軸與短軸之長的和；但是，直軛直徑之長的平方和却是定數（等於長軸與短軸之長的平方和）。

以上是有關圓錐曲線這個單元的經典著作的簡略介紹，我們特別要指出，Apollonius證明這些性質，都只是利用綜合幾何的方法，而沒有利用坐標的觀念；也因爲他所使用的方法實際上已經具備解析幾何的意義。所以，後世的某些數學家認爲解析幾何的創造者應該是希臘人。

四、射影幾何方法的運用 Desargues

Apollonius 以後，希臘幾何的黃金時代漸趨結束，其後的幾何學家可以說沒有特別的突破，這期間著名的數學家有 Heron，Menelaus，Ptolemy 及 Pappus 等，其中，Heron 在幾何上的成就大都在平面與立體的測量方面；Menelaus 及 Ptolemy 的主要成就在三角學以及天文方面；所以，在圓錐曲線方面，可以說從 Pappus 之後到西元 1600年間，都沒有特別的進展。十七世紀以後，一方面由於 Conic Sections 的拉丁譯本陸續出現以及某些數學家開始着手於 Conic Sections 第八卷的重編，另一方面由於許多實際問題的需要，圓錐曲線的探討再度引起了數學家們的興趣。例如，望遠鏡與顯微鏡都在十七世紀初葉就發明了，這些光學儀器中透鏡的設計就是一個主要的關鍵；航海家們探險的需要引出了如何將船隻的航線描繪在球面上或者是地圖上的問題；地動說理論的出現也引起了數學家們對運動中的物體所經路線的興趣；在各種運動的物體中，抛射物是很重要的一種，因爲大砲已經發明了，對於砲彈所經之路線及彈着點的研究，當然是非常重要的。

由於要解決各種實際的需要，十六、七世紀的數學家發現希臘數學家所使用的方法缺乏一般性。因此，圓錐曲線的討論有了一種思想上的改變，他們不再將圓錐曲線侷限於圓錐面上之截痕這種看法，而將這類曲線定義成滿足某些條件的點的軌跡。例如，Guidobaldo del Monte（1545－1607）在 1579 年就把橢圓定義成平面上至兩定點的距離和爲定數的點的軌跡。利用這種軌跡的方法，許多曲線也都重新做了一番探討。

另一方面，德國天文學家 Johann Kepler（1571－1630）在 1604 年提出了一種大膽的想法。這種想法稱爲連續變動的原理：他從一雙曲線出發，設焦點 F，F' 在直線 L 上，將 F 點固定不動，而讓 F' 向遠處移動，則雙曲線的一支也跟著向遠處移動，當 F' 移至無窮遠處時，F' 及雙曲線的一支都消失了，這時雙曲線變成了抛物線；如果 F' 是從左側移動至無窮遠處，假定它能從 L 的右側轉回來，則當 F' 從 L 的右側移回來時，抛物線又變成了橢圓，當 F' 繼續移動至與 F 重合，則橢圓又變成圓。這種看法使得 Kepler 將這些圓錐曲線看成一體。

事實上，Kepler 的想法絕不是沒有根據的。如果我們取一雙向直圓錐面 Ω 及一平面 π，當 π 不過 Ω 的頂點而與 Ω 之軸垂直時，其截痕是一個圓；接着將 π 略作移動，使得它不過頂點也與軸不垂直，則其截痕爲一橢圓；再將 π 略作移動，使得它與 Ω 的一條母線平行，則其截痕爲一抛物線；將 π 再進一步移動，使它不過 Ω 的頂點但與 Ω 的上下兩部分都相交，則其截痕爲一雙曲線。利用這種操作，就

可以了解Kepler 的連續變動原理其實是相當有直觀性的。

Kepler 的連續變動原理引進了無窮遠點的觀念，這種想像中的點，在 1639 年法國數學家Girard Desargues（ 1591 — 1661 ）給以有系統的探討。Desargues 不僅引進了無窮遠點，還引進了無窮遠直線，利用這種新的觀念，Desargues 成功地開拓了幾何學的一片新領域——射影幾何。把這些觀念應用到圓錐曲線時，Desargues 補充了Apollonius 的許多不足之處。例如，根據Apollonius的極點與極線定義，有心錐線的中心沒有極線，通過中心的直線沒有極點；可是，有了無窮遠點及無窮遠直線的觀念後，中心的極線可以毫無矛盾地定義爲無窮遠直線，而通過中心的直線的極點可以定義爲在其共軛直徑方向的無窮遠點。更重要的一項成就是，許多Apollonius 必須分別就拋物線、橢圓、雙曲線三種情形來處理的結果，在Desargues 的射影幾何技巧之下，都可以一次完成。例如，Kepler 與Desargues 都把拋物線看成有兩個焦點，另一個是無窮遠點。

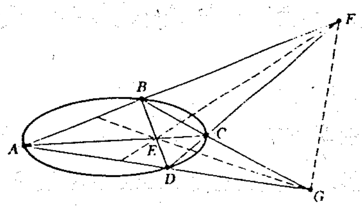


圖 8

Desargues 證明了一個定理，它提供了作極線與切線的一個最簡便方法：當一個四邊形內接於一個圓錐曲線時，則在對邊交點與對角線之交點（右圖的 E ，F ，G ）中，任意兩點的聯線都是另一點對該圓錐曲線的極線。

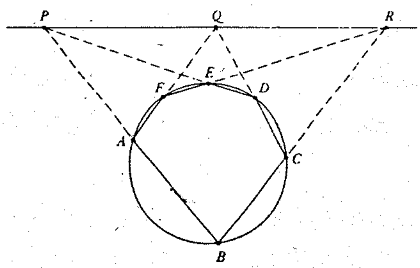


圖 9

射影幾何的第二位開山祖師是法國數學家Blaise Pascal（ 1623 — 1662 ），他有一個很著名的定理，現代稱爲Pascal 定理：當一個六邊形內接於一圓錐曲線時，則其三組對邊的交點必共線。參看右圖 9 。Pascal 定理的逆敘述也成立。不過，Pascal 本人却沒有發現這個事實。

另一位射影幾何大師是法國數學家 Philippe de La Hire（ 1640 — 1718 ），他不僅把Apollinius 在圓錐曲線方面的三百多個定理利用射影幾何的手法重加證明，而且他還嘗試著要證明射影方法比Apollonius 的綜合方法與Fermat，Descartes 的解析方法要優異。不過，一般而言，La Hire 的成就並沒有超出Desargues與Pascal，在極點與極線方面，他提出一個重要結果：共線點對圓錐曲線的極線必共點，而這個公共點就是所共之線的極點。

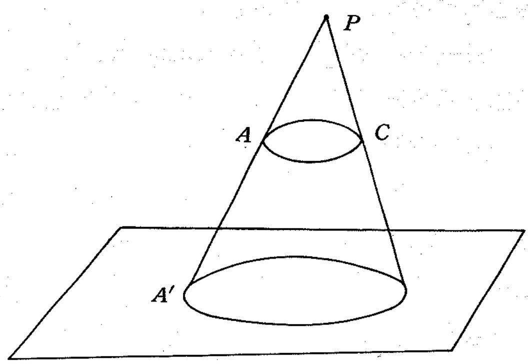


圖 10

我們都知道，當一個圓斜著看時，它的形狀

變成是橢圓，Desargues所使用的方法就是從這種角度衍生出來的。在上圖 10 中，P 爲一點，C 爲一圖形，π 是一平面，若將 C 上任意點 A 與 P 連接，若直線 PA 與平面 π 交於 A' 點，則 A' 稱爲是 A 對射影中心 P 在 π 上的射影。若 PA 與 π 平行，則稱 A 在 π 上之射影爲（某一）無窮遠點。如此，C 上各點在平面 π 上的射影構成 π 上的一個圖形。若 C 是一個圓，則仿照圓錐截痕的道理，適當地放置平面 π 的位置，可使 C 在 π 上的射影爲一圓，或一拋物線或一橢圓，或一雙曲線。由於射影過程中，有些性質是不變的。例如，共線點的射影仍是共線點；共點線的射影仍是共點線等等。所以，以 Pascal 定理爲例，如果我們證明 Pascal 定理在圓的情形中成立，則利用射影的道理，可推出其在拋物線、橢圓、雙曲線的情形也成立。這種方法就是 Desargues 等人所使用的射影方法。

這種射影方法，在十七世紀被提出時，並沒有得到太多的回響，許多幾何學家認爲它是危險而不健全的。甚至，連Desargues 在這方面的重要著作 Brouillon projet 都因不被重視而遺失，即使連 Desargues 的好友 Ren'e Descartes，對於不使用代數而證明圓錐曲線的性質這種做法，都感到恐慌。幸好，西元1847 年巴黎圖書館找到了La Hire 手抄的一份Brouillon projet，才使得射影幾何這個領域能順利地開展出來。

五、坐標概念的引進：Fermat與Descartes

主張使用代數方法處理幾何問題的法國數學家Ren'e Descartes（1596－1650），通常被尊爲解析幾何的鼻祖。事實上，法國另一位數學家Pierre de Fermat（1601－1665）在1629 年就已經引進了坐標幾何的概念，而Descartes 引進坐標概念的著作La Geometrie 則在1637 年才出版。不過，Fermat 在其生前都沒有將其有關坐標幾何的著作 Introduction to Loci出版，所以，有些人以爲坐標幾何的概念是Descartes 一個人的傑作。很有趣的一件事是，他們兩人引進坐標概念的基本目的不相同，以致雙方曾發生爭執。

Fermat 與Descartes 兩人都曾經指出，圓、橢圓、雙曲線、拋物線的方程式是二次。不過，兩人都沒有進一步地利用方程式去討論圓錐曲線。最先以坐標幾何的方法討論圓錐曲線的是英國數學家 John Wallis（1616－1703），他在1655年的著作De Sectionibus Conics 中，利用Apollonius 所介紹的幾何條件導出圓錐曲線的方程式，並利用方程式的方法去證明圓錐曲線的性質。至此，幾何學中有關圓錐曲線的探討大抵上已經成熟。因爲，綜合幾何的方法，射影幾何的方法、解析幾何的方法都已經陸續派上用場，而有關圓錐曲線的各種性質都可以利用這些方法來發現及證明了。 □

參考書目

1. Bell, E.T., The development of mathematies, McGraw-Hill, 1945, 2nd edition.
2. Boyer, C.B., A History of mathematics, 1968.
3. Eves, H., An introduction to the history of mathematics, Rinehart and company, Ine., 1953.
4. Kline, M., Mathematical thought from ancient to modern times, Oxford University Press, 1972.
5. Lockwood, E.H., A book of curves, Cambridge University Press, 1963.
6. Smith, D.E., History of mathematics, vols. 1 and 2, Dover Publications, Inc., 1953.