·科學教育月刊　第44期　中華民國七十年（1981）

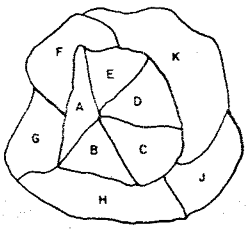
# 四色問題

啓華
國立高雄師範學院數學系

四色問題是一個看起來似乎容易，而實際上是十分困擾的問題，所以非常有趣而吸引人。

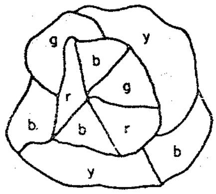
## 一、問題的敍述

設有一個地圖如下圖：

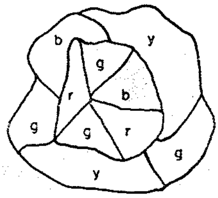



要把它塗上顏色，規定：(1)有共同界線的兩個地區（例如G與H）要用不同的顏色，(2)只有公共頂點的兩個地區（例如A與C）可用相同的顏色，(3)一個地區必須是連通的，例如F與H就必須視作兩個不同的地區，(4)每一曲線必須是兩個地區的界線，換言之，一個地區內不能用曲線劃分區域，而因之每一曲線的兩側要用不同顏色。

上列的地圖可用十種顏色以符合以上的規定。但可以只用四種顏色也能夠辦到，以b、g、r、y代表藍、綠、紅、黃四種顏色，可以做如下面(a)圖中的着色，符合規定的着色法不是唯一的，下面的(b)圖是另一種方法。




(a)




(b)

四色問題是：在平面或球面上，符合以上規定的每一個地圖都可以只用四種或少於四種顏色着色。但尚未有人證明這事［註］，所以稱爲“問題”，表示是未解決的問題。若能找出一種地圖需用五種顏色，這個問題也解決了——說明四色問題的敍述是錯誤的。

## 二、問題的簡史

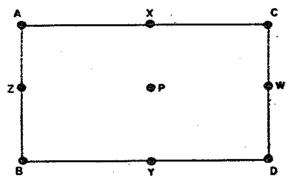
這問題是由Möbius在1840年提出的，Kampe與Tait都“證明”過四種顏色就夠了。事實上，Tait在1880年所發表的“證明”只是證明了如果能解答另一個圖形（graph）的着色問題則四色問題就獲得證明，而圖形的着色問題仍是未解答的問題，所以Tait只是把一個“未解答”的問題轉換成另一個未解答的問題。Kampe在1879年所做的“證明”中的錯誤不甚顯著，以致在十年後方由Heawood指出其錯誤之所在，Heawood並同時證明了在平面上的地圖用五種顏色足夠了，所以若能找出一個地圖需用五種顏色，不但否定了四色問題也建立了“五色定理”。另外Heawood還解答了在環面（torus）上地

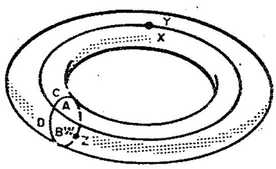
圖的着色問題，因爲環面是較平面或球面繁複的一種曲面，大家都認爲在環面上的地圖着色問題會更困難，所以Heawood 的這個發現實在是了不起的鉅作。

平面上的四色問題在1880～1890的十年中大家都認爲是已解決了的，由此推想目前可能有些定理我們認爲已證明了，其中會有大家未發現的錯誤而實際上應是尙未證明的。數學研究者有責任仔細考察每一個證明認淸它們是否確實沒有錯誤。

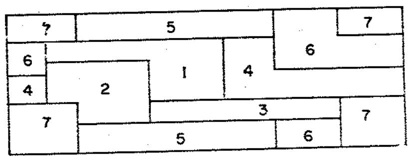
## 三、環面上的七色地圖

在上一段中所提到Heawood 的建樹，他所證明平面上的任何地圖用五種顏色就足夠了，證法並不難也不繁長，本篇主旨在作介紹性的敍述，所以不涉及稍深入的理論性題材以免讀者會有枯澀之感。有興趣的讀者可參讀本篇後所介紹的書。另外，Heawood 證明了在環面上的任何地圖最多用七種顏色就可符合本文第一段中所述的規定。而且在環面上存在一個地圖需要七種顏色且不能少於七種顏色。由此定理，環面上的七色問題已獲得解答。如同以上所述，在此也不介紹其證法只介紹其內容。




環面上的作圖不容易辨識，爲了使地圖易於觀察，把上面下圖中的環面沿AXC與AZB二圓割開，這環面因而舖展成一個矩形（上面的上圖）。若從上圖的矩形開始，先把BYD與AXC二稜連接，捲成一個圓柱面，再把圓柱面彎起使一端的圓CWD與另一端的圓AZB連接就形成一個環面。因之，環面上的任何地圖可以畫在矩形上表出，只要記住AXC上的點與BYD上的點是相同的點；同樣，AZB上的點與CWD 上的點也是相同的點。矩形四個角上的點A、B、C、D表環面上的同一點。有了以上的這些了解，就可以認出在環面上需用七種顏色的一個地圖如下，圖中有七個地區，每一個地區與其他六個地區全都相隣。




## 參考資料

A. W. Goodman：THE PLEASURES OF MATH。

［註］1976年九月的Bulletin of the American Mathematical Society中P.711至P.712介紹了這個問題已由美國 Illinois 大學的三位教授在兩篇文章給予證明，一篇的作者是K Appel 與W. Haken，另一篇的作者是以上二人及J. Koch。他們是把問題轉換成放電（discharging）方法之研究，利用電荷原理並藉助於電算機獲得結論。因不知道是否已爲數學界認定，所以本文不能確言這問題已獲得證明。 □