

牛頓發現 “萬有引力”的經過

蘇賢錫

國立臺灣師範大學物理系

科學革命的一大高潮，是牛頓（Sir Isaac Newton, 1642-1727）的萬有引力定律之發現：「任何兩物體間皆互相吸引，其吸引力的大小與兩質量的乘積成正比，與兩物體質心間距離的平方成反比。」牛頓將所觀察到的宇宙中主要物理現象，用一個數學定律來表達，並且證明地球上物體的運動與天體運動，遵守同樣的定律。萬有引力的概念一舉闡明了克卜勒（Johannes Kepler; 1571-1630）行星運動三定律的物理意義，解決潮汐來源的棘手問題，而且說明伽利略（Galileo Galilei, 1564-1642）所發現的令人好奇而解釋不了的事實——自由落體的下降速率與其重量無關。克卜勒企圖發展依據因果律的物理學而未果，牛頓卻將其實現。

萬有引力的發現極其重要，它成為成功的科學之楷模；它不是天才一時閃現的成果；它是一系列解決問題所聚積的最高潮；它不是歸納的結果；而是符合邏輯的演繹以及傳統觀念轉變的結果。萬有引力的發現，促成科學上的一項突破，

由最簡單的改革發展成為最富戲劇性的革命：「由於傳統觀念的轉變而導致某些新理論的創造。」

在1685年的前幾個月裏，牛頓着手發展萬有引力的概念，當時他是42歲。物理學家通常均在非常年輕時就獲得其偉大的成就，但是牛頓認為42歲是他「發明生涯的全盛時期」。

1679年末期到1680年初期，牛頓對萬有引力採取決定性的步驟。當時虎克（Robert Hooke, 1635-1703）介紹一種新方法給牛頓，以便分析沿着曲線軌道的運動。虎克發現，繞曲線軌道運行的物體具有兩個分量，亦即慣性分量與向心分量。慣性分量的趨勢是將物體沿着曲線軌道的切線方向推動，而向心分量則不斷地將物體拉離慣性直線軌道。在穩定軌道上，例如月球的軌道，這兩個分量相配，所以月球既不會沿著切線方向一直跑出去，也不會螺旋地轉向地球。

向心力的概念取代比較古老而且容易引起誤解的離心力概念。笛卡爾（René Descartes, 1596-1650）與海更斯（Christian Huygens, 1629-1695）曾經應用這種離心力來分析過曲線運動。例如，笛卡爾研究中空圓筒內面的球體運動，以及繞圓運動中水桶內的水之運動。球與水似乎逃離該系統的中心，於是笛卡爾認為，其運動係由於離心力的影響所引起。現在我們明白，根本沒有這種力，離心力與物理學上的物體並沒有交互作用。離心力的錯覺，是由於觀察者從轉動座標系中，來觀察物體的運動。

對物體轉動的看法，從離心力轉變為向心力之後，中心物體的基本功用便可察知。離心力的分析主要着眼在轉動物體，其遠離中心的趨勢似乎與中心物體的性質無關。反之，向心力的概念完全依靠中心物體，而迴轉物體乃被中心物體所吸引。中心物體與迴轉物體之間的交互作用，顯然在任何引力理論中均皆扮演重要的角色。

虎克對於曲線運動的分析，似乎是笛卡爾的

慣性原理之直接而顯然的結果，因此，牛頓好像不必等到1679年始由虎克來提醒他。牛頓早在二十年前就或多或少地接受了慣性原理。雖然如此，正如笛卡爾與海更斯一樣，牛頓因為過分陷入於離心力概念的困境中，所以他對慣性物理的真正意義，無法掌握。

1679年11月24日，虎克寫信給牛頓，提議彼此作私人的「哲學」通信，就彼此有共同興趣的科學問題加以討論。牛頓對稜鏡的色散與色彩性質所作的實驗與理論，他們曾經在六年前公開發生意見的衝突。在幾位研究人員之中，虎克是唯一反對牛頓的光學理論的人。牛頓由於必須為自己的著作來辯護而感到厭煩，所以他發誓他要放棄「哲學」（物理科學），因為他認為哲學是「好訴訟的婦人」，凡是跟她接觸過的人，都必須花盡他的餘生來為自己的觀點辯護。

當時虎克擔任倫敦皇家學會秘書的職務。雖然他倆曾經發生過節，但是他寫給牛頓的信是友善而和藹的。這封信件要求牛頓批評虎克的假設與觀點，特別是對於「將行星在天空中的運動視作切線方向的直接運動與向中心物體方向的吸引運動之複合運動」這觀念。這一句話顯然使牛頓引進「將曲線運動分解成為慣性分量與向心分量」的構想。牛頓對圓周運動的瞭解程度，可能不及虎克。事實上，牛頓仍然利用離心力來說明軌道運動。

虎克在他的信中大膽提議，太陽拉行星的向心力，與其間隔距離的平方成反比。在這一點上，虎克停滯不前。他看不出他自己深刻見解的力學意義，因而不能從直覺的預感與猜測跳躍到正確的科學。他不能向前邁進，因為他缺少牛頓那種數學的天才，也不十分瞭解克卜勒的面積定律。而這定律在後來牛頓探討天體力學時，扮演了重要的角色。面積定律的內容是：由太陽到行星的徑矢，在相同時間內掃過相同面積。

11月28日，牛頓寫信告訴虎克說，他還沒有看過虎克24日的信以前，「我不知道你所做的假設，即行星在天空中的運動，可以視作切線方向的直接運動與向中心物體方向的吸引運動之複合運動」。牛頓承認虎克的分析是一項新的觀點，然後，他立刻把這觀念應用到自己的課題：「地球的轉動對自由落體的影響。」假如落體能夠通過轉動的地球，其路線將是什麼？牛頓誤下的結論是，它將是螺旋軌道。

虎克在12月9日寫的第二封信中，指出牛頓的錯誤，並且表示這路線「可能像個橢圓」。虎克渴望牛頓進行行星運動的問題，因此，他建議說，通過地球的落體與他的行星運動分析，都是屬於「直接運動與向心吸引運動的複合運動」之例。

1679年12月13日，牛頓回信給虎克，謹慎地接受他的更正，但對於虎克就圓周運動分析方面的提議，卻沒有置評。虎克沒有放棄。1680年1月6日，他又寫信給牛頓，重提曲線運動，再度提議具體的假設，說向心吸引力與距離的平方成反比。由這假設出發，虎克得到的結論是，迴轉物體的速度與其距中心的距離成反比。然後，他指出，他的分析「確實可以清楚地說明觀察天空所得的資料」。然而，牛頓沒有回信。

1月17日，虎克寄出一封補充性的短信。他在信中寫着：「假如向心吸引力使物體偏離其慣性路線，而如果這吸引力與距離的平方成反比，則物體運動的軌道是何種曲線？我相信，憑你的優秀方法，你不但能夠輕易地發現這應該是什麼曲線，而且能指出這個平方反比例的物理意義。」

牛頓顯然已經做到這一步。他證明橢圓可以滿足虎克所提出的條件。雖然如此，牛頓沒有把這證明方法寫信告訴虎克或其他任何人，直到1684年8月，天文學家兼數學家哈利（Edmund

Halley, 1656-1742) 來訪為止。哈利的來意是要問牛頓：「假如太陽對行星的吸引力與其間的距離平方成反比，則這行星的軌道將是什麼曲線？」該問題已在皇家學會討論過許多次。哈利與列恩 (Christopher Wren, 1632-1723) 都不會解決這個問題，虎克也從未求出答案，雖然他堅持他已找到答案。

當牛頓聽到這問題時，他立刻回答說：橢圓。哈利問牛頓，是怎樣知道的？牛頓答說：「我是計算出來的。」牛頓顯然一時找不到他計算過的資料，但在哈利催促之下，他寫了一篇小論文「運動論」給皇家學會。在「運動論」中，牛頓敘述其對於地球與天體力學的研究，包括他對真空中與阻尼介質中的運動的看法。牛頓一定是在1684年12月10日以前完成「運動論」，因為哈利在這天向皇家學會報告說，最近牛頓給他看過一篇奇妙的論文。

從牛頓與虎克開始通信起，到他完成「運動論」初稿時，他在這一段時間的思考進展情形，史料並無記載。雖然如此，我們相信，使牛頓走上正確路線的是虎克提議的那種分析曲線運動的方法。在幾件自傳性稿件裏，牛頓寫着：他與虎克的通信，不是在他提出他的見解之前，就是在提出見解的同時，而他的見解是，具有慣性運動

而且受到反距離平方方向心力作用的物體，其運動軌道為橢圓。他的這種見解，出現在早期的「運動論」與後來的「自然哲學的數學原理」（簡稱「原理」）。

克卜勒的橢圓軌道定律（任何行星的軌道均為橢圓，而太陽位於該橢圓的一個焦點上），其物理意義就是由牛頓所闡明的。現代人可能覺得驚奇，克卜勒的行星運動定律，說明其基本性質的人，竟然不是克卜勒本人，而是牛頓。然而，「原理」一書尚未問世之前，這些定律（當時甚至稱為假設）沒有像後來那樣受到重視。

尤其是克卜勒的等面積定律，其在17世紀時的地位，極不顯著，甚至大多數天文著作都沒有提到它。例如，史特利德 (Thomas Streete) 的「卡羅來納天文學 (Astronomia Carolina)」，從未討論過等面積定律，或暗示等面積定律的存在，而牛頓就是從這本書抄到克卜勒的第三定律（行星與太陽間之平均距離，其立方與軌道週期的平方成正比）。17世紀的大部分天文學家，並沒有依靠等面積定律來計算行星的位置，而是根據發自行星橢圓軌道空焦點的等速轉動向量來作圖求出，（見圖一）。由於天文學家很少應用面積定律，牛頓需要特別敏銳的洞察力來瞭解其重要性。把克卜勒的等面積定律提高到今天地

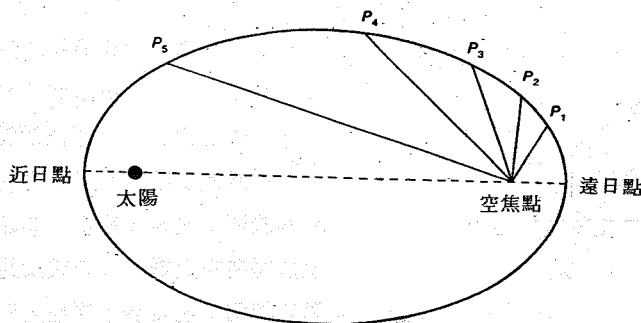


圖 1

位的人，就是牛頓。

「原理」的第一個主題是，證明面積定律所代表的曲線運動就是由於向心力的結果，因而闡明等面積定律在力學上的重要性。這項證明包括三個部分，顯示牛頓完全學習虎克的分析技巧，把曲線運動分解成為慣性分量與向心分量。

在證明的第一部分，牛頓討論沿直線等速運動的物體。該直線分成等間隔的線段，表示物體在相同時間內移動相同的距離（見圖2）。然後，在直線上方距離為 H 處選擇一點 P ， P 點與任何等間隔所連成的三角形，其面積全等，因為這些三角形的底邊與高度，分別相等。利用這種簡單的分析，牛頓求出慣性運動與等面積定律之間的令人意想不到的關係。

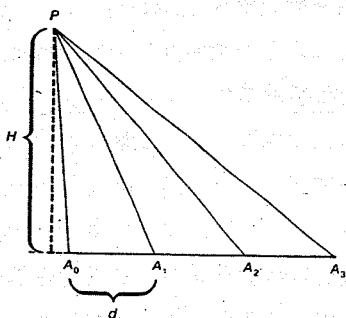


圖 2

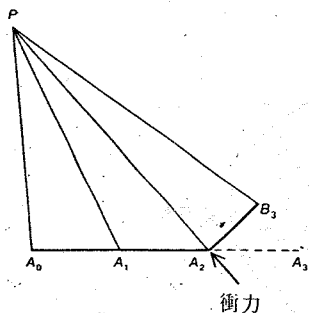


圖 3

在證明的第二部分，起初物體的運動如前所

述，但在第二個間隔末端，它受到朝向 P 點的衝力（見圖3）。因此，在第三個間隔內，物體不再沿原來的直線方向運動，而沿比較靠近 P 點的另一條直線運動。牛頓又利用幾何學證明， P 點和第二個間隔的軌道兩端之連線所成的三角形與 P 點和第三個間隔的軌道兩端之連線所成的三角形，這兩個三角形的面積相等。

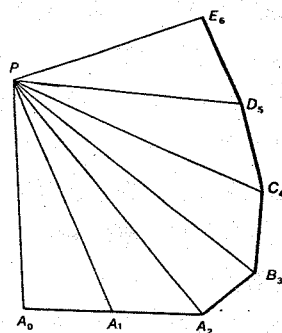


圖 4

在第三個部分，物體在每一個間隔末端均受到朝向 P 點的衝力（見圖4）。結果，物體繞 P 點沿多邊形路線運動，而等面積關係仍然成立。在兩次衝力之間的間隔趨近於零的極限情形之下，物體受到朝向 P 點的連續作用力，而多邊形路線遂變成圓滑曲線（軌道）。如此，牛頓證明由向心力所引起的物體運動路線係依照等面積定律而來。

「原理」的第二個主題，則證明上述的相反過程；即等面積定律所描述的曲線運動，暗示向心力的存在。利用這兩個主題，牛頓證明等面積定律是中心力場內的慣性運動之充要條件。

這兩個主題是一系列證明的一部分，這一系列的證明，從等面積定律開始，一直到證明橢圓軌道需要與距離的平方成反比的向心力。這一系列的證明，記載於「原理」與「運動論」，表示科學發展史上的一大突破。這項證明，完全運用新的天體力學，並且根據力、動量、質量、與慣

性的新觀念，以及完全新穎的力的測量法。在克卜勒所著的「天文學」裡，他希望能在開普勒的基礎上，創立天體物理學。這個對他遙不可及的目標卻由牛頓所達成了。伽利略與笛卡爾都未曾想到這種天體動力學。牛頓所闡述的力學系統，甚至使偉大的物理學家海更斯都相形失色。

牛頓可能在1684年11月發表「運動論」的初稿，由此初稿可見，當時他尚未發展萬有引力的概念。該初稿討論朝向橢圓焦點的向心力，而其結論有下列的附帶註釋：「因此，主要行星均沿着橢圓軌道迴轉，太陽中心為該橢圓的一焦點，而由行星到太陽的向徑掃過的面積與時間成正比，正如克卜勒所假設……」。

牛頓沒有證明這段註釋，也沒有長期繼續相信它。（嚴格說起來，這註釋是不對的）。不久，他發現，在克卜勒式的簡單橢圓軌道（太陽在一焦點）上，行星並不依照等面積定律而運動。其實，焦點是在共同的質量中心上，因為不但太陽吸引各個行星，而且各個行星也吸引太陽（同時，行星之間也互相吸引）。假如牛頓已經完成其萬有引力定律，他就不至於寫下這段錯誤的註釋。

行星沒有完全依照橢圓軌道定律與等面積定律而運動，牛頓迅速發覺他沒有證明這一點。他發現這些定律僅適用於單體系統，單體系統是指具有慣性分量的一個質點在中心力場中的運動。他知道單體系統不能代表真正的物理世界，而只能代表人造的情況，用數學處理比較容易。單體系統把地球簡化成為一個質點，把太陽簡化成為不能移動的力中心。

使牛頓超越單體系統的是，他對他的運動第三定律（作用反作用定律）的深入了解。這個定律可能是他的三個運動定律中最富創意者。（其他兩個定律是慣性定律與力的定律）。

牛頓完成「運動論」初稿之後，他對於作用

反作用觀念的思考發展情形，發表在「原理」第一本書的開頭部分。在第11節的緒論中，牛頓說：他一直把自己限制在「幾乎不能存在於實際世界」裏的情況，亦即「被吸向靜止中心的物體之運動」。這種情況是不自然的，因為「通常吸引力的方向是朝向諸物體，而——根據運動第三定律——吸引與被吸引的物體，其作用力是相互的，而且大小相等」。結果，「假如有兩個物體，則吸引的物體與被吸引的物體都不能保持靜止。」而「兩個物體都（依照該定律的第四個系）應該繞其共同的中心而迴轉，猶如彼此相吸一般。」

牛頓已經看出，如果太陽拉地球，則地球也必然拉太陽，其拉力大小應該彼此相等。在這二體系統中，地球並不在簡單的軌道上繞太陽運行，而太陽與地球都繞其共同的質心而運動。運動第三定律的進一步結果是，每一個行星都是吸引力的中心，同時也是被吸引的物體；因此，行星不僅吸引太陽與被太陽吸引，而且吸引其他行星與被其他行星所吸引。此處，牛頓已經邁開一大步，從二體交互作用系統進入多體交互作用系統。

1684年12月，牛頓完成「運動論」修訂稿，就多體交互作用系統的情況來敘述行星運動。和早期初稿的結論不同，在修訂稿中，牛頓指出「行星既不是真正沿着橢圓軌道運行，也不在同一軌道運行第二次。」這項結論使牛頓獲得下列結果：「一個行星有許多軌道及許多運行方式，猶如月球的運動一般，而任何一個行星的軌道，均由所有行星的聯合運動來決定，當然，也要考慮到所有這些行星之間的交互作用。」然後，他寫着：「要同時考慮到所有這些運動的原因，而且要利用簡便的計算以求出正確的定律來定義這些運動，除非我說錯了，這件工作確實超出整個人類智力的範圍。」

牛頓如何察覺出行星之間的引力作用，文件

上面並沒有記載，但是，上面一段敘述中所引用的句子，清楚地表明這種見解：「所有這些行星之間的交互作用。」這種相互引力作用的一個結果是，克卜勒的三個定律在物理世界中並不完全正確，它們只是在數學的構架上才是正確的。在這個數學的構架上，質點之間並沒有交互作用，各個質點繞著一個數學上的力中心或一個靜止的吸引物體而轉動。在數學領域中，克卜勒定律是對的，但在物理領域中，它們只能算是「假設」或是「近似」而已。牛頓將這兩個領域予以區別，這就是牛頓天體力學的革命性特色之一。

「原理」的第三本書，討論世界系統，數學性較濃。牛頓利用多體交互作用方法，來處理萬有引力問題。首先，他在所謂月球試驗中，將地球的重力延伸到月球，證明該力與距離的平方成反比。然後，他說明該力在性質上相同於太陽對行星的作用力，以及行星對其衛星的作用力。所有這些力，牛頓稱為萬有引力。他藉助於運動第三定律，將太陽對行星作用力的觀念，轉變成為太陽與行星之間交互作用力的觀念。同理，他把行星對衛星作用力的觀念，轉變成為行星與衛星之間交互作用力的觀念。最後一次轉變所得的觀念是，所有物體之間都彼此有萬有引力的作用。

由上面分析可知，牛頓對物理學的思考力之豐富。他把數學應用在由實驗與精密觀察所顯示出來的物理世界。這種思考方法可以稱為牛頓方式，反映在牛頓的偉大作品：「自然哲學的數學原理」。

牛頓方式包括數學觀念與物理事實之間的反覆取予。牛頓在發展其萬有引力的過程中，以及在撰寫「原理」時，他的出發點是，以數學的構架來代表簡化的自然界：亦即，一個質點繞著力中心轉動。因為他沒有假設這種數學觀念能夠代表真正的物理世界，所以他可以自由自在地探討數學上的吸引力之性質與影響，縱然他發現一般

物理學家不易接受的「超距力」觀念。其次，他比較其數學觀念的結論與觀察所得的物理原理及定律，例如，克卜勒的等面積定律與橢圓軌道定律。當數學的構架有不足之處時，牛頓就加以修改。他使力中心成為一個質點，而不是一個數學量。我們特別稱其為質點，因為他尚未考慮到大小、形狀、質量等物理性質。

從修改過的數學構架，牛頓所得的結論是，繞力中心迴轉的一組質點，彼此相互吸引，而且互相擾亂彼此的軌道。又一次，他比較了數學構架與物理世界。在所有的行星中，木星與土星的質量最大，因此，他探討其運動軌道的擾亂情況。在福蘭斯狄（John Flamsteed）的協助下，牛頓發現，當木星與土星最靠近時，土星的軌道運動受到擾亂。反覆再三比較數學構架與物理事實，再作適當的修改，這種過程，終於使行星在處理上變成具有一定大小形狀的真正物體。

在牛頓修改數學構架好幾次之後，他將其應用在世界系統上。他把經由數學導出的吸引力稱為萬有引力。由月球的運動情形，他發現地球對月球的作用力，只有地球對地球表面物體的作用力之 $1/3600$ 。因為月球離地心的距離，較地球表面物體離地心的距離大60倍，所以 $1/3600$ 這因數，與反距離平方定律互相符合。

萬有引力定律可以說明，行星為什麼大致上遵守克卜勒定律？也可以說明，為什麼並不真正遵守該定律？萬有引力定律可以證明，在沒有摩擦的情況之下，在地球上的任何特定地點，為什麼所有的物體均以相同的速率下降？並且可以證明，為什麼該速率隨高度與緯度而改變？萬有引力定律又可以說明月球的規則與不規則運動，而且可以提供物理根據，以了解並且預卜潮汐的現象。

與牛頓同時代的某些人，對於超距吸引力的觀念感到困惑，不去探討其性質，因而不容易接

受牛頓物理學。然而，接受牛頓方式的人，充分發揮萬有引力定律的效果，解釋了許多其他物理現象。牛頓方式，使牛頓不受限於未成熟的抑制力，而能夠研究萬有引力，否則這種抑制力，一定會阻礙其偉大的發現。十八世紀的生物學家戴蒲豐（Georges Louis Leclerc de Buffon）曾經說過，一個人的方式就是他本人的特徵。在牛頓的情形，他的偉大發現永遠離不開他的方式。

虎克與牛頓的通信明顯地表示，虎克告訴牛頓，如何分析曲線運動。後來，虎克更加強調，他曾向牛頓建議萬有引力的大小是與距離的平方成反比，因而他值得享受這份發現的光榮。許多歷史學家同意虎克的看法。

然而，這種說法並未持久。虎克只是提議，行星受朝向太陽的一個與距離平方成反比的吸引力。然而，萬有引力不僅僅是太陽的吸引力。它也代表行星對太陽的影響力。而且，它可以應用在宇宙中所有的物體。萬有引力定律不單是與距離平方成反比的關係；它也是代表互相吸引的物體質量之間的數學關係。要從與距離平方成反比的太陽吸引力跳躍到萬有引力，需要極大的洞察力，而只有牛頓的天才始能發展出現代的質量概念。

雖然虎克曾提議說，向心力與距離的平方成反比，但是，牛頓並不覺得應該歸功於虎克。

1673年，海更斯發表一篇有關鐘擺的補充性文章。他在文中表示，圓周運動的離心力大小是以 v^2/r 來衡量， v 為迴轉物體的速率， r 為迴轉半徑。早在1660年代，牛頓已經發現同樣的關係。因為離心力與向心力在數學上的差別，只是方向的問題，所以 v^2/r 的關係，對向心力也可以成立。從這項關係與克卜勒的第三定律，再根據簡單的代數運算，便知向心力與距離的平方成反比。在海更斯的著作出版以後，任何具有代數知識的人，都能發現圓形軌道的與距離平方成反

比的向心力。牛頓不以為他必須向虎克表示謝意。

虎克與牛頓都知道，圓形軌道的距離平方反比定律之發現，與證明該定律在遵守克卜勒等面積定律的橢圓軌道上仍可成立，這完全是兩回事。牛頓所作的工作是要證明向心力的距離平方反比定律，是相當於依照克卜勒的橢圓軌道定律與面積定律之軌道運動。在討論這問題時在1680年1月6日的信中，虎克在討論此問題時犯了基本上的錯誤，使得牛頓深信，虎克沒有完全理解他所討論的內容。虎克說，如果吸引力與距離的平方成反比，則行星的軌道速率將是「正如克卜勒的假設，與距離成反比」。然而，在虎克所假設的條件之下，軌道速率並不與距太陽的距離成反比，除非行星在軌道的兩個極端點：近日點與遠日點。由於虎克的犯錯，牛頓對虎克所作的建議（向心力具有反距離平方的性質），並不特別感激。

（取材自「科學美國人」1981年3月號）