科學教育月刊　第 44 期　中華民國七十年（1981）

自然數高次級數和的一般解問題 －下－

黃錦富
台北市立芳和國民中學

四、Bernoulli 數

現在，先讓我們介紹一下〔註三〕：所謂 Bernoulli 數之定義如下：設有函數寫成

$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n x^n}{n!}$，其中 B_n 即稱爲 Bernoulli 數，注意：它與 x 變數毫無關係，由上定義可知：

$$B_n=\left[\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)\right]_{x=0}\text{，對於 } n=0,1,2,3\cdots\cdots\text{。} \quad \cdots\cdots\cdots(4\text{-}1)$$

若要知道 Bernoulli 數之確實數値，吾人可由定義裏，利用級數展開之方法得：

$$\frac{1}{x}\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots\right)\left(B_0+B_1x+B_2\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots\right)=1$$

然後，利用對照係數方法知 $B_0=1$，$B_1=-\frac{1}{2}$，$B_2=\frac{1}{6}$，$B_4=-\frac{1}{30}$，$B_6=\frac{1}{42}$，$B_8=-\frac{1}{30}$，$B_{10}=\frac{5}{66}$，$B_{12}=-\frac{691}{2730}$，……且對於所有 $n\in N$；$B_{2n+1}=0$ 。

另一方面，比較（4-1）式及（3-5）式知在 $f_s(n)$ 中所定義出的 b 數列可用 Bernoulli 數來表示，即

$$b_{n-1}=\frac{(-1)^n B_n}{n!} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4\text{-}2)$$

回朔定理(一)，吾人知 $f_s(n)=\sum_{k=1}^{n}k^s=\sum_{k=1}^{s+1}a_k n^k$，而當 $a_{s-k}=b_kA_k(s)$ 時，吾人順利地求得 $b_{n-1}=\frac{(-1)^n}{n!}B_n$ 之關係，爲了配合這些結果，故做以下之推演：

$$f_s(n)=\sum_{k=1}^{s+1}a_k n^k=\sum_{k=0}^{s}a_{s+1-k}\,n^{s+1-k}=\sum_{k=0}^{s}b_{k-1}A_{k-1}(s)n^{s+1-k}$$

但因　$A_k(s)=\prod_{l=1}^{k}(s-l+1)=\frac{s!}{(s-k)!}$

$$\therefore \quad f_s(n)=\sum_{k=0}^{s}\frac{(-1)^k B_k}{k!}\times\frac{s!}{(s-k+1)!}n^{s+1-k}$$

$$=\frac{1}{s+1}\sum_{k=0}^{s}(-1)^k B_k C(s+1,k)\,n^{s+1-k}$$

利用上面這個等式，以及各個B_k之值，可以得出自然數之高次和的表示法，例如：

$$\sum_{k=1}^{n}k=f_1(n)=\frac{1}{2}(B_0n^2-2B_1n)=\frac{1}{2}(n^2+n)=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=f_2(n)=\frac{1}{3}(B_0n^3-3B_1n^2+3B_2n)=\frac{1}{3}(n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n)$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=f_3(n)=\frac{1}{4}(B_0n^4-4B_1n^3+6B_2n^2-4B_3n)$$

$$=\frac{1}{4}(n^4+2n^3+n^2)=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^4=f_4(n)=\frac{1}{5}(B_0n^5-5B_1n^4+10B_2n^3-10B_3n^2+5B_4n)$$

$$=\frac{1}{5}(n^5+\frac{5}{2}n^4+\frac{5}{3}n^3-\frac{1}{6}n)=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

〔註一〕：所謂簡單形式，即凡能由有確定值之函數直接定義，其間運算除有限的加、減、乘、除外，不再有其他運算者，稱之爲簡單形式之函數。如：x^n，e^x，l_{nx} ……等均是x變數的簡單形式函數，而 $\eta(s)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-s}$， 係無限級數和，它需由無窮步驟之運算加以定義，且在數值上也很難以確定，故可歸類於非簡單形式函數。

〔註二〕：其嚴密敍述請參考一般高等微積分：如〔A1〕的第241－243頁，及〔漢1〕的第129頁。

〔註三〕：參見〔A 2〕書中，P.278—281 。〔E 2〕書中P.11—12 ，及100—103。

參考書籍

〔漢1〕：“分析探原”施克剛譯：聯經出版事業公司，68年12月初版。

〔A1〕: Apostol, T.M. :“ Mathematic Analysis ” 2d ed. California Institute of Techology, Pasadena, 1973 。

〔A2〕: Arfken, G.B. :“ Mathematic Methods for Physicists ” 2d, ed, Miami University Press New York. 1973 。開發公司翻印。

〔E1〕: Edwards, H.M. :“ Femat's last theorem ” , New York, 1977。凡異出版社翻印。

〔E2〕: Edwards, H.M. :“ Riemann's Zeta Function ” lst, ed. New York and London, 1974。凡異出版社翻印。

□