“顯然的”數學

國立臺灣大學數學系　黃宜人

筆者當學生時，最討厭看到數學書上的三字經“顯然的”。大學程度以上的一些洋文數學書中It is obvious that 簡直頁頁可見，觸目驚心。筆者不是聰明的學生，每個obvious都得花上幾分鐘到幾十分鐘，有時甚至幾小時或幾天才能想得通。所以，筆者讀書的速度很慢，看到那些一目十行的同學瀟洒自如，眞是又羨又嫉。既然無法取巧，只好老實地奉行“勤能補拙”的古訓，把別人用來談戀愛的時間花在書本上。因此，大學時代的“羅曼史”就交了白卷。

數學書上的許多“顯然的”，固然是貨眞價實，但有許多則是如假包不換的。筆者認識一位名氣不算小的數學家，有次把一個問題想了三天三夜，想通之後告訴筆者，其結果是“顯然的”。筆者是他老友，當然淸楚他的意思。這個結果不值得寫成一篇學術論文來發表，只能當作數學書上的練習。

每個人天賦有別，學術修養不同，生活的環境與經歷也相異。將“顯然的”用得太多，尤其只從自己的立場出發，是會產生許多誤會的。閒話少說，我們來說個與數學有關的故事：

幾十年前，小學還在教所謂的“老數學”。一位剛從城裡到鄉下小學教六年級的老師，在開始教“鷄兎同籠”的問題時，碰到了相當戲劇化的一幕：這位老師先把一道題目寫在黑板上

今有鷄兎同籠，只知頭共三十五，脚共八十八，問鷄兎各幾何？

照例叫全班齊唱一遍後，要學生想想如何解決。一位平常數學不好的學生，突然擧手發言：

老師，你剛從城裡來，大槪不知道，第一，鄉下人“顯然”不會把鷄和兎子關在同一個籠子裡，因爲兎子會給鷄啄死；第二，兎子通常都是蹲着的，你“顯然”沒辦法算淸楚所有的兎脚；第三，鷄頭和兎頭“顯然的”不同，要知道鷄兎各幾何，只要分開來點算鷄頭和兎頭就可以了。所以，這種問題“顯然”只有城裡的笨人才會碰到，鄉下人是不用學的。

在全班哄堂大笑之餘，老師只好拼命解釋，數學裡的假想情況是什麼，數學除了應用在日常生活之外，尙有訓練思考等功用。這堂數學課就在熱哄哄的氣氛下結束了。故事還沒完呢！第二天上數學課時，那位寶貝學生又擧手啦，老師猶豫了一下，還是讓他發言。他說：

老師，我昨天回家，把你們城裡人的笨問題想了想，已經想通了，“顯然”簡單的很。

老師很驚奇，請他把題目解給全班同學看。他大搖大擺的帶着兩個籠子走上講台，從籠裡抓出一隻公鷄和一隻白兎，放在講桌上。在他一聲口哨之下，公鷄作單脚獨立之狀，而白兎則只用兩隻後脚站着。然後他說：

如果老師籠子裡的每隻鷄和兎子，都和我養的公鷄、白兎一樣，聽到我的口哨後，鷄會用單脚站，而兎子只用兩隻後脚站。那我們就可以少算一倍的脚。所以，把老師算出來的脚數88除以2，得44

就是我吹口哨後算出來的脚數。這時，雞只有一隻脚，兔子兩隻脚，所以44減去頭數35，得到的9，就是兔子的數目，再用頭數35減去9，得到的26就是雞的數目。這種問題“顯然”很簡單（黑板上列出的式子如下）。

88 ÷ 2 = 44……………雞單脚，兔双脚時的脚數

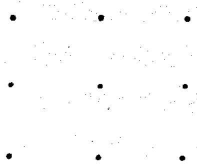
44 − 35 = 9……………兔子的數目

35 − 9 = 26……………雞的數目

老師一聽，這位寶貝高足的“顯然”是碰巧碰對了的解法，“顯然”就是雞兔問題的一般解決，眞是欣喜異常。由於這位寶貝的活生生的表演，全班不用老師再加解說，都學會了雞兔問題。

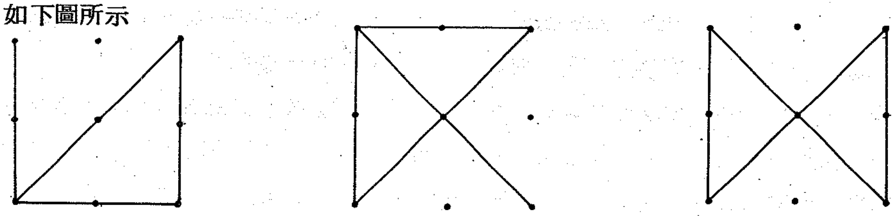
我喜歡這個故事，因爲它提示了一個理想的教學情況（學生熱烈的參與，對教材內容有生動的演示），因此寫出來與讀者共享。

這個故事的另一個提示是，如果我們能從不同尋常的角度，來查看我們熟悉的問題，可能會有異想不到的結果。人類本來就是習慣性的動物，老是株守在他們熟悉的小圈圈內，跳不出來。只有少數的人能勇敢的跨越這些界線，古希臘時代亞力山大大帝的快刀砍高定結（Gordian Knot），就是一個很好的例證。下面的一筆畫問題，是心理學中用來測驗人在這方面的性格的典型題目之一：

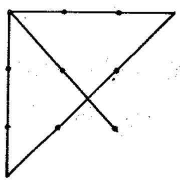


你能筆尖不離開紙面，只用四條線段一筆連接右圖的九個點（線段不准重複畫）嗎？

受測驗的人，百分之九十以上解不出這道題，並不是他們的數學程度差（因爲其中也有精通一筆畫的數學家在內），而是他們跳不出一個無形的框框，這個框框就是上圖中外面的八個點構成的正方形。他們失敗的原因是，所畫的線段不越出上述的正方形，如下圖所示



解決這個問題的必要條件是，所畫的線段一定要超越上述的正方形，如下圖所示：



一個人要突破習慣的界限，固然需要很大的勇氣。但勇氣十足並不保證就能解決問題，我們還得找出問題的癥結加以研究，以便決定突破的方向。讓我們以下面的具體例子來說明，以免流於空洞的清談：

例1　在台北市內，有沒有頭髮數目剛好一樣多的兩個人？

也許有人會懷疑這個問題是否有意義（數學中慣用的術語是，問題是否成立），譬如說，昨天的我和今天的我，頭髮的數目可能不一樣（洗頭或睡覺時都可能掉頭髮）如果一個人的頭髮數目都不固定（會隨着時間的不同而有所改變），怎麼能說某兩人的頭髮數目相等呢？

對一個問題的是否成立加以懷疑，是解決問題的過程中很重要的第一步。除了使你不致於浪費許多寶貴的時間在研究沒有意義的問題外，如果你有充份的理由說服你自己，這是個有意義的問題，這表示你對這個問題已有足夠的理解，可以進行解決的工作。筆者當老師多年，碰到很多對問題還不瞭

解就開始作答的學生，他們的答案當然是不知所云了。

上述問題是成立的：因爲，即使一個人的頭髮會隨着時間而有所改變，但在一個特定的時刻，某兩人的頭髮數目還是有可能一樣的。確定此事之後，我們的問題變成，那兩個人？在怎樣的時刻？即使我們能把一個人的頭髮數目算出來，那一定曠日持久，從開始算到算完畢，此人的頭髮可能掉了好幾根，也可能長了好幾根了。

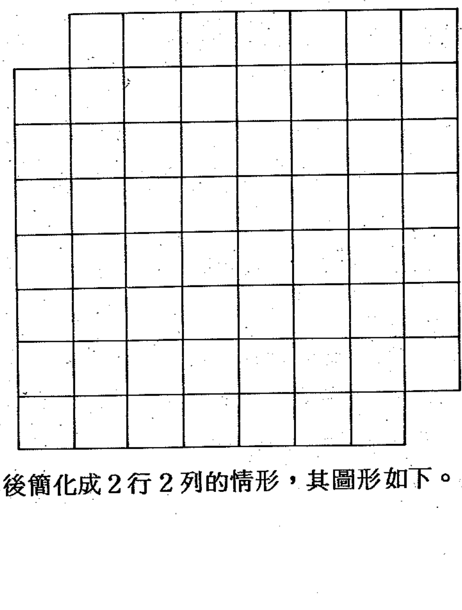
由此看來，認眞的去數一個人的頭髮，一定不是一個正確的方法。頭腦轉得快的讀者，可能想到去數兩個禿頭的人的頭髮，他們的頭髮數目少，容易數且不容易錯。不錯，這確實是一個好主意。但筆者想在這裡提示讀者，我們是想把這個問題當作數學問題來看待的，一個數學問題很少會要你那麼認眞的去數數的（小學裡的數學也許例外）。你能從這個提示想到什麼？

我們不希望你去數頭髮，因爲頭髮的數目多。但一個人的頭髮會多到多少？會不會無限多？不可能！那麼有沒有限制？這是一個關鍵性的問題。數學裡碰到數數的問題時，最常問到的兩個問題是：這些事物的數目有沒有可循的規律？在這個問題裡，規律大概找不到。因爲規律的建立要求我們，至少要做出三四個簡單的例子，這在本問題是做不到的。第二個常問到的問題是，這些事物的數目有沒有一個上限（即存在一個數，要數的事物的數目都不超過此數）？

最後的問題問出來後，我們已經踏上了解決問題的正確方向。如果我們去查生理衞生的課本，或百科全書、醫學辭典之類的資料（這當然不屬於數學的範圍。但會從適當的地方找出需要的資料，是一個人能否在現代社會中生存的最基本的能力之一。很遺憾的是我國的教育，在這方面還有待加強）就知道人類頭髮的上限是 25 萬。

由於台北市約有 200 萬人口，這個數目遠超過 25 萬。所以，即使前 25 萬人的頭髮數目不一樣，第 25 萬零 1 人的頭髮數，一定和前 25 萬人中的某人頭髮數相等。即，問題的答案是肯定的。

例 2 用 8 行 8 列共 64 個小正方形構成一個大正方形，然後在對角上去掉 2 個小正方形，就得到下面的圖形。如果要切成 2 個小正方形連在一起的長方形 31 個，可能嗎？如果可能如何切？如果不可能，爲什麼？

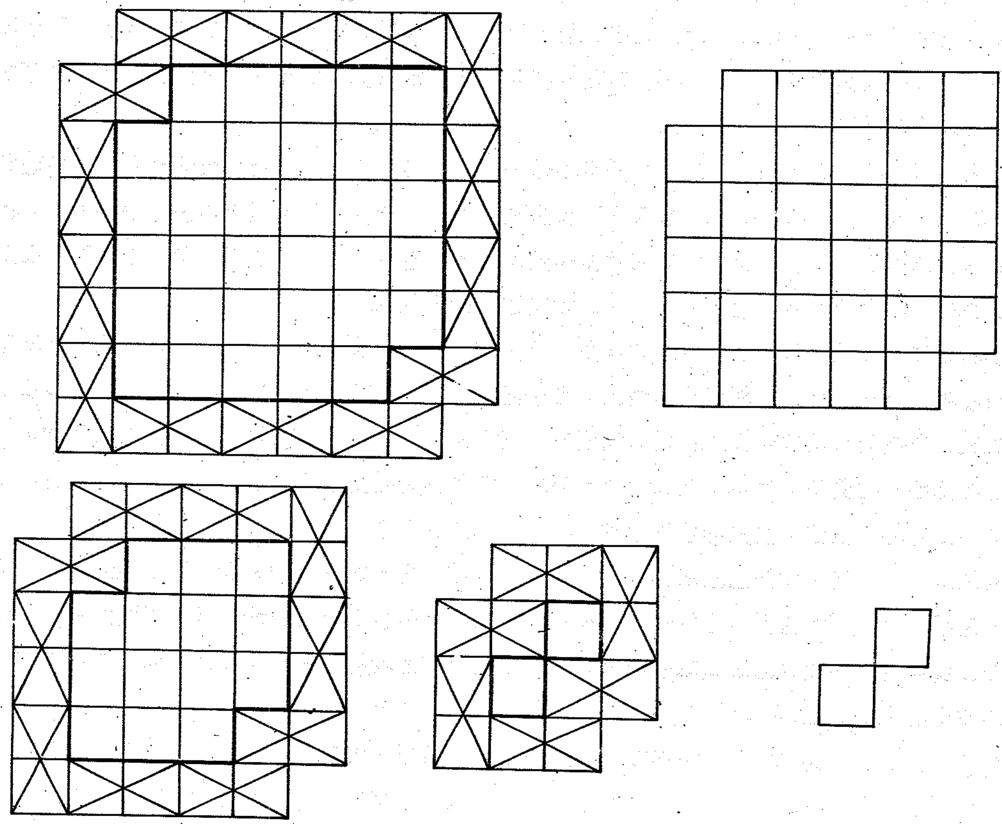


要切成　或　形狀的長方形共 31 塊，可不可能？

這個問題乍看之下好像容易，其可能性似乎無庸置疑。於是，許多人開始就動手切割，但操作後才知道，切到最後總是剩下兩個不連在一起的小正方形。所以，試了幾種切法之後，大部分的人都確信是不可能的。但爲什麼呢？明晰的理由也很難給出來。下面，我把兩個學生所給的理由寫出來。

甲生的解法　他先把圖形沿着邊切，把原來的圖形簡化成 6 行 6 列的情形；再仿照着簡化成 4 行 4 列，最後簡化成 2 行 2 列的情形，其圖形如下。又下圖中是用長方形的 2 條對角線表示 2 個連在一起的小正

方形是一起切掉的：



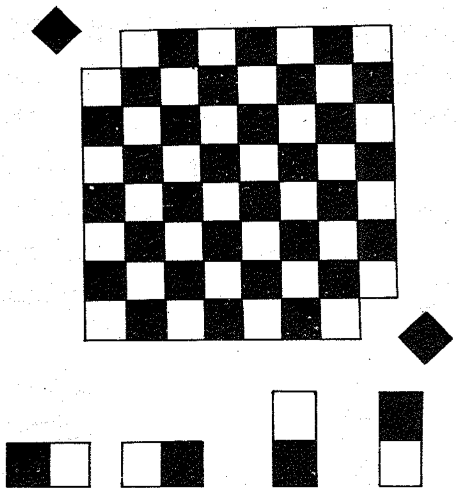
然後他推論說，既然問題可以簡化成2行2列的情形，而2行2列的圖形又不能按照規定的方法切，所以原來的圖形不能按規定的方法切。

這裡指出在上述推論中，有一個邏輯上的漏洞：即在他的簡化過程中，我們只能說“如果6行6列的圖形能按規定的方法切割，則8行8列的圖形也能按規定的方法切割”。但反過來並不成立，即我們無法得到“若6行6列的圖形不能按規定的方法切割，則8行8列的圖形也不能按規定的方法切割”的結論。

由於這個邏輯上的漏洞，甲生的解法當然算錯。一般說來，把問題簡化後再加以解決，是數學裡解題時最重要的方法之一。很可惜，2行2列的情形是否定的，不然這個解法會是很漂亮的解法。下面是乙生的解法。

乙生的解法　乙生是個西洋棋高手，他把這個問題看了老半天後，決定先把問題中的圖形塗上顏色，使之變成西洋棋盤的樣子，如下圖：（圖見次頁）

由於西洋棋的棋盤是8行8列共64個小正方形組成，對角上並沒有去掉兩個小正方形，所以他把問題中切去的那兩個小正方形，補畫在旁邊。他指着這個圖說：如果我們要把兩個相連的小正方形一起切去，則切出來的長方形一定是一半白的一半黑的，如下圖的形狀之一（圖見次頁）



在原來的西洋棋棋盤上，黑白小正方形的數目剛好一樣多。但在我們的問題中，把西洋棋棋盤的對角上的2個小正方形去掉，一定去掉2個同顏色的小正方形。這樣數目就不湊巧了，如圖所示黑的小正方形只有30個，而白的小正方形則有32個，所以沒辦法照規定的方法切。

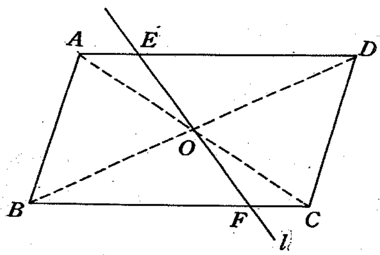
乙生的解法純靠他對西洋棋盤的熟悉，這種機緣並不容易碰到。還好這種題目並不多，不然唸數學的人都要以下西洋棋作為副業了。下面兩題全是平面幾何的問題，我們試用不同的角度來看。

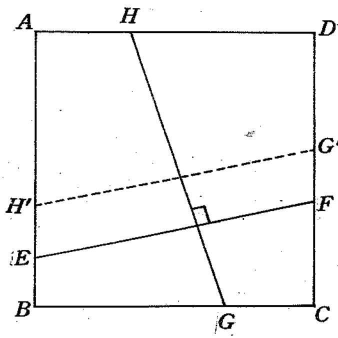
例3 試證過平行四邊形對角線交點的任一直線，把平行四邊形切成面積相等的兩塊。

這個題目利用平面幾何的定理來證明，也並不很難。但如果我們利用“平行四邊形關於其對角線的交點為中心對稱圖形”的性質，證起來就更簡單了。因為上述性質保證：以平行四邊形的對角線中點O為旋轉中心，把平行四邊形旋轉180°，則其圖形不變。注意到，此時（參看下左圖）：

A點轉到C點，B點轉到D點，C點轉到A點，D點轉到B點。

在這個旋轉中，通過O點的任一直線，都轉到它自身（如圖$\overline{OE}$轉成$\overline{OF}$，$\overline{OF}$轉成$\overline{OE}$），所以$ABFE$全等於$CDEF$，故其面積相等。





例4 一個正方形內互相垂直的兩線段，當他們的兩端點都在正方形的對邊時，這兩線段一定等長（如上右圖）。

像這樣的問題，如果用旋轉的觀點來看時，也是很簡單的：以正方形$ABCD$的兩對角線交點為旋轉中心，旋轉90°，假定此時$\overline{GH}$轉成了$\overline{G'H'}$，則$\overline{G'H'}$一定與$\overline{GH}$相垂直，即$\overline{G'H'}$與$\overline{EF}$平行。此時，我們就有兩平行線AB與CD間，所截的平行線段$\overline{G'H'}$與$\overline{EF}$為相同的結果。

上面兩個例題都是平面幾何的題目，但我們利用圖形旋轉的方式來看問題時，題目變得很簡單。像圖形的旋轉，對稱（或鏡射）等剛體運動，本來是高中數學裡的正宗教材，由於我們的教科書沒有好好處理，以致大部分的學生無法加以應用，實是一大憾事。

當然，數學中還有許多問題，用不同於我們慣用的看法處理，可以變的簡單，限於篇幅，無法一一列舉。本文只希望提出來的幾個例子，能作讀者解題時的參考。 □