熵是什麼？

規則性抑或無規性

蘇賢錫
國立臺灣師範大學物理系

熵（Entropy）是個具有什麼意義的量呢？當我們向物理學家請教這個問題時，通常所得到的答案是「表示無規性程度的量」。這種答案令人覺得似懂非懂，其實，這不能算是完整的答案。假如我們再進一步問：那麼「無規性」的程度究竟是什麼？不能立刻回答這個問題的物理學家，可能爲數不少。倘若不懂「無規性」的意義，則「熵是表示無規程度的尺度」這種答案，便毫無意義。

現在，暫且考慮由1到6的20個數字所組成的下列4種數列：

(a) 1 6 3 5 6 1 6 5 5 1 1 1 4 5 6 3 4 2 2 1

(b) 2 6 1 4 3 2 6 1 4 3 2 6 1 4 3 2 6 1 4 3

(c) 1 2 1 1 2 1 1 1 1 2 1 2 2 2 1 2 1 2 2 1

(d) 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

在這些數列中，何者是無規性的？何者是規則性的？

(a)似乎是無規性的，反之(d)顯然是規則性的，那麼(b)呢？乍看之下，好像是無規性的，但是仔細一看，2 6 1 4 3這5個數字有規則地反覆出現。雖然如此，這不能算是規則性的。就2 6 1 4 3這種排列而言，它是無規性的，那麼(c)呢？1與2的出現，毫無規則可說，因此，它應該是無規性的。然而，就1到6所形成的數列而言，只出現1與2的數列，似乎不能算是無規性的，因爲它受到「只出現1與2」這種「規則」的限制。

換言之，顯然規則性的數列 只有(d)，其他三種數列的規則性，相當模糊，就(a)而言，它只是看起來好像無規性而已。如果有人要問，它是不是確實無規性？可能沒有人敢斷言它確實是無規性的。

無規性乃是規則的性質

其實，(a)是骰子擲20次後，將其結果記錄下來的。既然如此，(a)可以說是完全無規性的，因爲這是隨便擲骰子所得的數列。然而，這是獲悉(a)是擲骰子所得的數列之後始能斷言的，假如僅僅就(a)本身來看，它的無規性是無法斷言的，因爲假設骰子的形狀較爲特殊，而1與6的兩面比較容易出現，則擲這種骰子而得到與(a)相同的數列，這種可能性相當地大。如果知道(a)是經過這樣過程所產生的數列，則我們不能說(a)是完全無規性的，它應該是具有或多或少的規則性。

同理，(b)與(c)也只不過看起來是規則性而已，不能斷言它們是眞正規則性的數列，因爲隨便

擲骰子的結果，可能出現(b)與(c)這種數列。假如(b)與(c)是隨便擲骰子所得的數列，則我們不得不認爲它們是無規性數列。前面已經判定爲規則性的數列(d)，這種道理同樣可以適用，因爲它也可能是隨便擲骰子所得的數列。

然而，假設(b)係骰子擲5次而出現2 6 1 4 3，其餘是根據「反覆重寫這些數字」這規則而得到的，則(b)不能算是無規性。同理，假設(c)是擲硬幣時，根據「正面出現就寫1，反面出現就寫2」這規則所得到的數列，則(c)也不是無規性的數列。此外，如果根據「只排1」這規則而獲得(d)，則這數列也不是無規性的。

總而言之，僅看數列，我們無法判斷其無規性與規則性。雖然是同一個數列，因其產生方法的不同而有時必須認爲它是無規性的，有時反而必須認爲它是規則性的——換言之，無規性與規則性並不是數列本身的性質，而是產生數列的規則之性質。

換句話說，無規性與規則性是這規則所產生的所有可能數列集團的性質，因爲只要規則一決定，該規則可能產生的數列集團也就可以決定。

如此，問題的本質相當明朗了，但是我們仍然尚未完全清楚。(d)暫且不提，假如(b)與(c)是擲骰子或擲硬幣的規則所產生的數列，則它們不是無規性的，這種說法是否成立，不無問題？它們雖然不是完全無規性的，卻是具有某種程度的無規性，是否如此？不錯。如果(c)是擲硬幣而產生的，則因硬幣是隨便擲的，所以我們還是不得不認爲它是無規性的。(b)也是一樣，骰子擲了5次，但是這5次也是隨便擲的，所以雖然無規性的成份不多，我們又不得不認爲它是具有無規性的要素。

換言之，上列產生(b)與(c)的規則，與「隨便擲骰子」這種規則比較起來，確實規則得多，但其規則本身仍然是無規性的，只不過因規則的性質而使無規性的程度不同而已。其實，對(d)而言，這道理也是一樣，只是我們可以認爲「只排1」這種規則的無規性等於零而已。

無規性愈大資訊量愈大

然則，這些無規性的序列，應該如何決定？

根據我們的直覺，無規性的程度似乎依照下列次序而增大：(1)只排1，(2)骰子擲5次，將其數目反覆列出，(3)硬幣擲20次，(4)骰子擲20次。其實，這個次序，與應用這些規則所產生的所有可能數列的總數的次序，完全一致。例如，規則(1)所產生的數列，顯然只有1種，但是規則(2)所產生的數列總數爲

$$6^5 = 7,776$$

規則(3)所產生的數列總數爲

$$2^{20} = 1,048,576$$

規則(4)所產生的數列總數爲

$$6^{20} = 3,656,156,640,062,976$$

數列總數愈多，無規性愈大，這種觀念又可以做如下的說明：若數列總數愈多，則要預測其中特定數列的出現就愈困難，不容易預測就是表示它比較無規，亦即不知何種數列會出現。

因此，假設所有可能的數列之總數爲W，表示無規性程度的量爲S，則S必爲W的單變增大函數。然而，僅靠這些知識，其函數關係還不能建立起來。

爲了決定S與W的函數關係，以下將用字列來代替數列。上面的理論，完全可以適用在字列，亦即，只要能夠想出產生國字的組合規則來代替上述產生數列的規則即可。例如，在國語中，具有意義的所有句子之總數，就是W。於是可知，W愈大，該語言所擁有的資訊量愈大。W愈大，表示該語言產生變化多端的句子的能力愈大。如此，無規性程度的大小，等於資訊量的多寡。

資訊量要以其和表示之

語言不是唯一的資訊源。例如，天氣預報，調頻廣播的節目預報，也是資訊源。這些資訊源所能產生的可能資訊總數W愈大，其資訊源的資訊量也愈大，而該資訊量應該能以S來衡量。

然而，由兩個資訊源——天氣預報與調頻廣播節目預報——接收資訊時，總資訊量等於天氣預報的資訊量 S_A 與節目預報的資訊量 S_B 之和，亦即 $S_A + S_B$，這是極其自然的想法，假如一個是天氣預報，另外一個是有關明天滑雪大賽舉行不舉行的資訊，則這種相加關係並不能成立。因為如果天氣預報是大風雪，則滑雪大賽暫停的機率較大，所以只要聽到天氣預報，就能約略知道滑雪大賽的動向，因此，縱使由兩個資訊源接收資訊，其資訊量可能較兩個資訊源的資訊量之和為小。

反之，在天氣預報與調頻節目預報的例子中，無論天氣預報是晴天抑或下雨，節目預報並不改變，例如，絕對不可能有預測晴天時，播送古典音樂較多；而雨天時，爵士音樂較多。因此，由這兩個資訊源接收資訊時的資訊量，等於各資訊源的資訊量之和。

設所有可能的天氣預報數為 W_A，所有可能的節目預報數為 W_B 則由兩個資訊源所能發出的資訊數為 $W_A \times W_B$，因為 W_A 個資訊中的每一個資訊均能與 W_B 個資訊中的每一個資訊作各種可能的組合。因此，設兩個資訊源能夠發出的資訊總數為W，則

$$W = W_A \times W_B \qquad (1)$$

另一方面，設由兩個資訊源接收的資訊量為S，則由上述可知

$$S = S_A + S_B \qquad (2)$$

S，S_A，與 S_B 分別須為W，W_A，與 W_B 的單變增大函數。為了滿足這種關係，同時使(1)，(2)二式成立，則下列關係必須成立：

$$S_A = K \log W_A$$
$$S_B = K \log W_B \qquad (3)$$

式中，K為常數，可以任意選擇。

由(3)式所定義，同時代表無規性程度與資訊量的量，稱為熵。對數 log 的底與常數K選擇妥當之後，即可決定熵的單位。

看樹枝情況，便知樹木種類

以上僅就數列與字列加以討論，但是縱然排列的東西不是數與字，而且不是排成一行而是形成二維，三維，甚至多維空間中的圖形，亦可同樣想出無規性來定義熵。換言之，只要知道產生這些圖型的規則，或知道所有可能圖形的總數，即可將熵求出。

例如，樹木的樹枝情況，因樹木的種類而差異頗大，特徵顯著的樹木，只要看看樹葉脫落僅剩枯枝的冬天樹木，即可判明其樹名，即使特徵不大明顯，專家也只要看看樹枝情形便可辨別各種樹木。樹木在其生長的過程中，長多久就會分枝，枝長隨樹高如何變化，會分成幾枝樹枝，分枝的角度如何，這些事項可能有某種規則。由於這種規則因樹木的種類而異，樹木的種類不同，樹枝的情形也就不同。

熵永遠繼續增大

物質中的原子與分子的分布，經常在改變，其動量，振動，以及轉動狀態，也時時刻刻在劇變，只是我們看不見而已。這是由於熱擾動而引起，溫度愈高，變化愈劇烈。

雖然如此，若將溫度、體積、以及分子數保持一定，則分子的分布情形，例如，那一個分子具有多少動量，其振動與轉動狀況如何，這些分布狀態的所有可能方式的總數，可以求出，換言

之，可由下式將熵求出：

$$S = K \log W$$

式中，S爲溫度、體積、以及分子數的函數。設對數係自然對數，K爲波滋曼（Boltzmann）常數（$K = 1.3806 \times 10^{-16}$爾格／度），這時的熵，就是出現在物理學上的熵。根據熱力學，以熱的形態把△Q的能量供給物質時，該物質的熵將增加$\Delta S = \Delta Q / T$（T爲絕對溫度）。

讓物質自然變化，不從外面供給熱量，也不從裏面取出熱量，則熵一定增大，這就是熱力學第二定律，因此，封閉物質系的熵，一定增大。

非封閉系的熵，不一定增大，但是假設其爲封閉時的熵之增加速率，如果大於開放時的熵之逃逸速率，則熵依然增大。地球不是封閉物質系，熵經常被排出到地球外面，雖然如此，地球上的熵之增加速率，如果大於其排出速率，則地球上的熵還是不斷增大。 □

（取材自「科學朝日」1981年7月號）

本中心九、十月大事記

1. 九月十四日，本中心假淡水工商管理專科學校，舉行國中數學及自然科學實驗學校校長及工作人員工作總研討會，國教司方司長及廳局長官蒞臨指導。
2. 九月廿五日，國中自然科學課程實驗班學生舉行第一次平常考試，成績優良足徵實驗教學的成功。
3. 九月廿五日，中正國防幹部預備學校實驗班舉行物理、化學、生物、地球科學等四科教學研討會，教育部中教司周司長蒞臨指導。
4. 十月二日，高雄市立五福國中自然科學實驗班舉行生物科教學研討會，教育部國教司方司長蒞臨指導。
5. 十月十六日，中正國防幹部預備學校實驗班舉行數學、基礎理化、基礎生物等三科教學研討會。
6. 十月廿三日，中正國防幹部預備學校實驗班舉行物理、化學、生物、地球科學等四科教學研討會。
7. 教育部爲響應國家科學教育往下紮根政策，本年九月委託本中心辦理幼稚園科學教育實驗研究及推廣計畫，本計畫第一次指導委員及研究委員聯席會議已於十月六日舉行。
8. 本中心各項課程改進計畫皆依原定進度順利進行，各計畫研究委員已分別開始編寫各科實驗教材。
9. 十月廿四及廿五日，本校舉行第卅五屆運動大會，本中心參加教職員衝破難關項目，在與賽的十八隊中獲得第五名。