科學教育月刊　第43期　中華民國七十年(1981)

數學錯證集錦

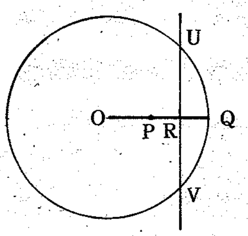
胡菽菁
國立臺灣教育學院數學系

衆所週知數學是一門嚴密的科學，從假設經邏輯推理得到的結論是絕對眞確無可置疑的；可是筆者却碰到過一些證明嚴密，而結論大悖常理叫人不敢相信的“數學定理”。本著奇文共賞的態度，筆者不敢私藏，願藉「科學教育」一隅，提供大家欣賞。但事先要聲明的，這些結論都和我們所熟知的定理衝突，讀者們請別因而乍見之下就排斥它，不妨花點時間仔細揣忖證明過程找出錯誤。

定理一

任意圓內部僅含有圓心一點。

證明：



設有一以O爲心r爲半徑的圓，再假定$P \neq O$爲圓內任意點，底下證明P其實在圓周上。

連結$\overline{OP}$，並延長至Q使得$OP \times OQ = r^2$過$\overline{PQ}$的中點R作垂直線，設其交圓O於U、V兩點，則

$$OP = OR - RP$$

$$OQ = OR + RQ$$
$$= OR + RP \qquad (RQ = RP)$$

$$\therefore OP \times OQ = (OR - RP)(OR + RP)$$
$$= (OR)^2 - (RP)^2$$
$$= [(OU)^2 - (RU)^2] - [(PU)^2 - (RU)^2]$$
$$\text{（畢氏定理）}$$
$$= (OU)^2 - (PU)^2$$
$$= OP \times OQ - (PU)^2$$

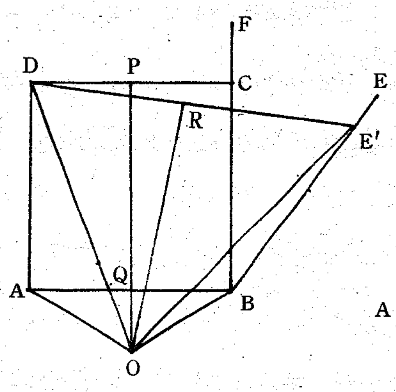
$$\therefore PU = 0$$

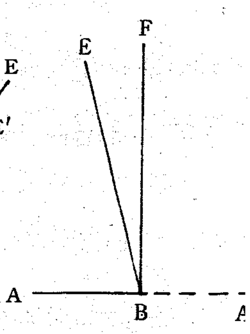
所以P與U重合，P點在圓周上。

定理二

任意角都是直角。

證明：





給定∠ABE，自B點作$\overrightarrow{BF}$垂直於$\overline{AB}$，我

們的目的是證明 $\overline{BE}$ 與 $\overrightarrow{BF}$ 重合。

假設不然，則有二種情形(甲) $\overline{BE}$ 落在$\angle ABF$ 的外面(乙) $\overline{BE}$ 落在$\angle ABF$ 的裏面。

首先討論甲情形，在 $\overrightarrow{BF}$上取$BC=AB$，並作一正方形ABCD 。

其次，取 $\overline{AB}$ 、$\overline{CD}$ 的中點Q、P，且在 $\overline{BE}$ 上取$BE'=AB$ 。

作 $\overline{DE'}$ 的垂直平分線，設和 $\overline{PQ}$ 連線相交於O，連結OA、OB、OD、OE' 。

在$\triangle OAD$與$\triangle OBE'$中

$OD=OE'$ （ $\overline{OR}$垂直平分$\overline{DE'}$ ）

$OA=OB$ （ $\overline{OQ}$垂直平分 $\overline{AB}$ ）

又 $AD=BE'$

$\therefore$ $\triangle OAD\cong\triangle OBE'$

$\therefore$ $\angle OAD=\angle OBE'$

接著我們依照 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overline{RO}$ 相交情形來討論$\angle ABE$。

(i) O點在P與Q之間時，則

$$\begin{aligned}\angle ABE&=\angle OBE+\angle OBA\\&=\angle OAD+\angle OAB\\&=90^\circ\end{aligned}$$

(ii) O點與Q點重合時，則

$$\begin{aligned}\angle ABE&=\angle OBE\\&=\angle OAD\\&=\angle BAD\\&=90^\circ\end{aligned}$$

(iii) Q點在P與O之間時，則

$$\begin{aligned}\angle ABE&=\angle OBE-\angle OBA\\&=\angle OAD-\angle OAB\\&=90^\circ\end{aligned}$$

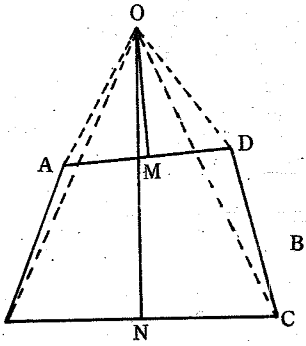
乙情形時，延長 $\overline{AB}$ 至A'，對$\angle A'BE$ 而言符合甲的情形，故由上面討論知 $\overrightarrow{BE}$與 $\overrightarrow{BF}$ 重合

證明完畢

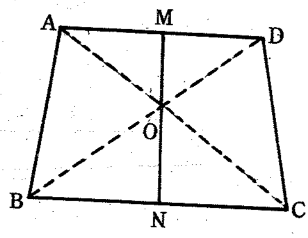
定理三

設四邊形ABCD之一雙相對邊 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 等長，則另一雙相對邊 $\overline{AD}$ 、$\overline{BC}$ 必互相平行。

證明：



圖一



圖二

過 $\overline{AD}$ 、$\overline{BC}$ 中點M、N分別作$\overline{AD}$、$\overline{BC}$之垂直線，設相交於O。再連結OA、OB、OC、OD（依O點之位置，可分為圖一或圖二兩種情形）。

在$\triangle OAB$及$\triangle ODC$中

$OA=OD$

$OB=OC$

$AB=CD$ （已知）

$\therefore$ $\triangle OAB\cong\triangle ODC$

$\therefore$ $\angle OAB=\angle ODC$

且 $\angle OAD=\angle ODA$ （$OA=OD$）

$\therefore$ $\angle BAD=\angle CDA$

又因 $\angle OBA=\angle OCD$ （$\triangle OAB\cong\triangle ODC$）

且 $\angle OBC=\angle OCB$ （$OB=OC$）

$\therefore$ $\angle ABC=\angle DCB$

故得 $\angle BAD+\angle ABC=\angle CDA+\angle DCB$

而四邊形ABCD內角和為360°

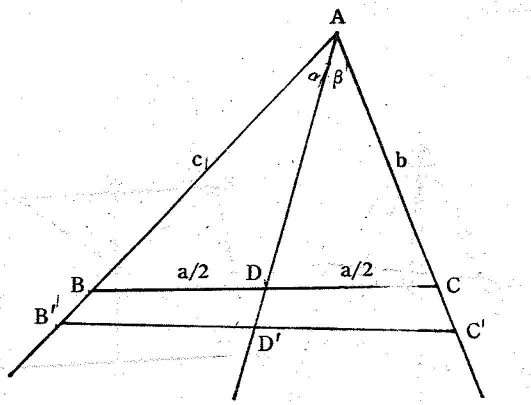
$\therefore$ $\angle BAD+\angle ABC=180^\circ$

所以 $\overline{AD}$必平行$\overline{BC}$

定理四

任何三角形都是等腰三角形。

證明：



設有一△ABC我們要證明AB＝AC 。

取 $\overline{BC}$ 中點D並連結 AD 。

由正弦定律知

$$\frac{BD}{\sin\angle BAD}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{CD}{\sin\angle CAD}=\frac{AC}{\sin\angle ADC}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

因爲sin∠ADB＝sin∠ADC，所以用(2)式去除(1)式可得

$$\frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle BAD}=\frac{AB}{AC}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

爲了方便起見，我們令∠BAD＝α，∠CAD＝β ，AB＝C，AC＝b則(3)式換爲

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{c}{b}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

再來，將 $\overline{BC}$ 往下移動，設移動中和 $\overline{AB}$ 、$\overline{AC}$ 延長線的交點分別爲B′、C′，我們可控制移動的方式，使得BB′和CC′恆相等。

將(4)式兩邊取對數，得

$$\ell og\ \sin\beta-\ell og\ \sin\alpha=\ell og\ c-\ell og\, b\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

因爲我們把 $\overline{BC}$ 移動，所以b、c可看成函數，而α、β則不變，(5)式微分後得

$$O=\frac{c'}{c}-\frac{b'}{b}$$

即 $\frac{c'}{c}=\frac{b'}{b}$

依照 $\overline{BC}$ 移動的方式BB′＝CC′故b′＝c′ 從而b＝c即AB＝AC得證

定理五

設O爲圓內一點，O不是圓心，則圓周上和O點距離最短的點不存在。

證明：

設圓心爲C，採用O爲原點，$\overleftrightarrow{OC}$ 爲x軸，定一直角坐標系。

設C的坐標爲(a，O)，若圓的半徑爲r，則圓上任一點P(x，y)滿足方程式

$$(x-a)^2+y^2=r^2$$

故 $x^2+y^2=2ax-a^2+r^2$

用S表示P(x,y)和O的距離，則

$$s^2=x^2+y^2=2ax-a^2+r^2$$

我們可把s看成x的函數，微分上式得

$$2s\frac{ds}{dx}=2a$$

故 $\frac{ds}{dx}=\frac{a}{s}$

即s處處可微且恆不爲O，故s無最小值。

定理六

所有實數都相等。

證明：

任意給定二實數m、n

我們考慮函數 $f(x,y)=\frac{mx+ny}{x+y}$

則 $\lim\limits_{x\to 0}f(x,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{mx}{x}=m$

$$\lim_{y\to 0}f(0,y)=\lim_{y\to 0}\frac{ny}{y}=n$$

令x、y同時趨近0，則得m＝n 。

定理七

$1 = 0$

證明：

設　$s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots\cdots$

將等式右邊各項由前而後兩兩相加，得

$$s = (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots\cdots$$
$$= 0+0+0+\cdots\cdots$$
$$= 0$$

若將級數從第二項起，兩兩結合運算，則得

$$s = 1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\cdots$$
$$= 1-0-0-0-\cdots\cdots$$
$$= 1$$

所以 $1 = 0$ 得證 □

附註：

本文主要取材自 E.A. Maxwell 所著的 Fallacies in Mathematíces，該書作者的目的是要藉著這些錯得離譜的結論，加強讀者對證明犯錯的警覺，這一點也正是筆者所期望的。

梅花鹿—— *Cervus taiouanus* BLYTH——

梅花鹿又稱花鹿，英名 Formosan sika deer，或 Formosan spotted deer，是台灣特產美麗的鹿。毛色在夏季爲黃褐色，背正中線黑色，背線兩側約有二十個白斑並列，背腹部及四肢內面尙有小白斑散布；在多季毛色變淡，成爲淡褐色，背正中線爲暗褐色，白斑不顯明。雄鹿有很漂亮的角，在三歲時生一枝，每年增添一枝，在五歲時成爲三枝（四尖）算是完成。

野生的梅花鹿在森林地帶棲息，常雌雄成對同行，但最近野生者已甚少發現。在南投縣的山區等地飼養者不少，因梅花鹿的肉、皮、鹿茸、鹿鞭，尤其後二者均被視爲珍品或補藥，屠殺者日衆。其實是否眞有藥效毫無學術根據。爲滿足一時之貪饞、好奇或迷信，使這種台灣特產美麗的動物面臨絕滅，實在是可惜。

封面說明