再談數學教材中的規律

黃宜人
國立臺灣大學數學系

本刊上期的“規律的覺察與數學的學習”一文，由於文章寫到一半時筆者臨時起意，談到如何與出題者鬥智，因此把文章的方向完全走偏了。雖然沒有人期望那是一篇嚴肅的文章，而且其中的取材比較能討好讀者，但文不對題總是寫作的大忌。因之筆者頗覺心中不安。想了又想，只好寫了這篇文章來贖罪！

數學材料中的規律，有些是顯而易見的，通常這些規律都相當重要。譬如說，我國宋朝的數學家爲解高次方程式，而創出的楊輝三角(如下)：

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

....

就因爲太有用了，所以雖然沒有流傳到歐洲去，四百年後巴斯卡再度把它做出來(我國教科書按西方的習慣稱之爲巴斯卡三角)。楊輝三角的一般常見的用法，這裡恕不多談，下面只舉另一個也許不那麼常見的用法：

如果令 $\tan\theta = t$

則下列各式都可用 $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}$ 的公式逐次代入而得到(請讀者自行代入化簡)

$$\tan 2\theta = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$\tan 3\theta = \frac{3t-t^3}{1-3t^2}$$

$$\tan 4\theta = \frac{4t-4t^3}{1-6t^2+t^4}$$

$$\tan 5\theta = \frac{5t-10t^3+t^5}{1-10t^2+5t^4}$$

....

各式中分母與分子的係數(正負號不記)，剛好是楊輝三角中的數字。當然，讀者不難看出下列的規律：其出現順序是按先分母後分子輪流的，分子(或分母)的各係數都是正負相間，且第一項的係數一定是正的。

但是，有些規律則不是如此的明顯。讓我們以下面的例子來加以說明：我們都知道二次方程式

$$ax^2+2bx+c=0$$

有重根的條件是 $b^2-ac=0$；問下面的三次方程式

$$ax^3+3bx^2+3cx+d=0$$

有一個二重根的條件爲何？(三重根的條件，讀者可由楊輝三角中自行找出，恕不多談)。

如果設其重根爲 α，另一根爲 β，則有下式

$$ax^3+3bx^2+3cx+d=a(x-\alpha)^2(x-\beta)$$

把上式等號右邊乘開後，比較兩邊係數，可得

$$3\frac{b}{a}=-2\alpha-\beta \cdots\cdots①$$

$$3\frac{c}{a}=\alpha^2+2\alpha\beta \cdots\cdots②$$

$$\frac{d}{a}=-\alpha^2\beta \cdots\cdots③$$

由上述三式中消去α與β即可得所要求的條件，其簡略過程如下：

先把①式改寫成

$$\beta=-2\alpha-3\frac{b}{a} \cdots\cdots④$$

代入②式得：

$$3\frac{c}{a}=\alpha^2+2\alpha\left(-2\alpha-3\frac{b}{a}\right)$$

$$=-3\alpha^2-6\alpha\frac{b}{a}$$

把此式等號兩邊除以 3 後，可改寫成

$$\alpha^2=-2\alpha\frac{b}{a}-\frac{c}{a} \cdots\cdots⑤$$

把④式和⑤式代入③式後，化簡可得（計算從略）

$$\frac{d}{a}=\frac{bc}{a^2}+2\alpha\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{c}{a}\right)$$

由此式解出α，可得

$$\alpha=\frac{ad-bc}{2(b^2-ac)} \cdots\cdots⑥$$

再把⑥式代入⑤式後，化簡可得（計算從略）

$$(ad-bc)^2-4(b^2-ac)(c^2-bd)=0$$

這就是所要求的條件。我們也可把它展開如下：

$$a^2d^2-6abcd+4b^3d+4ac^3-3b^2c^2=0$$

這並不是很漂亮的式子，乍看之下好像也沒什麼規律可言。但數學中的通則是：像這樣很自然出現的條件等式，一定有其自然的平衡。仔細檢查後，我們可列出下列三條並不十分明顯的規律如下。（有趣的是，這些規律對$b^2-ac=0$的條件也是合適的，請讀者自行檢查）：

(一)各項係數的和等於零。

(二)是一個齊次式。

(三)如果把出現的文字按它們在原方程式中出現的順序加權，則各項的權相等。

對第三條我們略加說明：$ax^3+3bx^2+3cx+d=0$中，文字出現的順序是 a，b，c，d， 我們令它們的權依次為 0，1，2，3（也可以依次定為 3，2，1，0），則條件等式中各項的權為

a^2d^2 的權為 $0+0+3+3=6$

$abcd$ 的權為 $0+1+2+3=6$

b^3d 的權為 $1+1+1+3=6$

ac^3 的權為 $0+2+2+2=6$

b^2c^2 的權為 $1+1+2+2=6$

這三條規律得來似乎有點牽強，但在檢查計算時却非常管用。訓練有素的數學家經常不自覺地使用這三條規律來檢查，他們自己或別人求得的條件等式（當數學老師改學生考卷時最好用）：

第一條檢查係數，

第二條檢查各文字的指數，

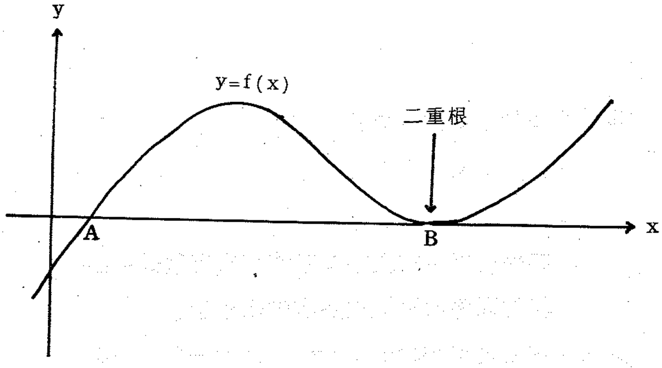
第三條檢查各文字出現的順序。

對這三條規律能否自覺或不自覺的加以使用，與此人在數學上的基本訓練成正相關：訓練不夠的人算出的條件等式常“不成形”，而訓練夠的人則不容易出錯。

為什麼有些基本訓練夠的人會不自覺的使用到這三條規律呢？這似乎是很奇怪的現象。下面，我們從幾何的觀點來加以解釋，讀者就會一目瞭然了：

設 $y=f(x)=ax^3+3bx^2+3cx+d$

則三次方程式 $f(x)=0$ 有一個二重根時，其圖形基本上如下：$f(x)=0$ 的根就是曲線 $y=f(x)$ 與 x 軸相交的點的 x 坐標。



假設上圖是畫在橡皮上，則把橡皮沿y軸拉長或縮短，並不會改變曲線 $y=f(x)$ 切x軸於B點的事實，換句話說，曲線 $y=kf(x)$ 與 $y=f(x)$ 和x軸有共同的交點，即 $kf(x)=0$ 同樣滿足條等式。但

$$kf(x)=(ak)x^3+(3bk)x^2+(3ck)x+(dk)$$

所以原來的條件等式中的各項變化如下：

$a^2d^2 \to (ak)^2(dk)^2=k^4a^2d^2$ ……………係數爲 k^4

$-6abcd \to -6(ak)(bk)(ck)(dk) = -6k^4abcd$ ……係數爲 $-6k^4$

$4b^3d \to 4(bk)^3(dk)=4k^4b^3d$ ……………係數爲 $4k^4$

$4ac^3 \to 4(ak)(ck)^3=4k^4ac^3$ ……………係數爲 $4k^4$

$-3b^2c^2 \to -3(bk)^2(ck)^2=-3k^4b^2c^2$ ……………係數爲 $-3k^4$

各係數的和仍然爲0，這就是條件等式一定得爲齊次式的原因。

其次，我們把橡皮沿x軸拉長或縮短，情形如上，即 $y=f(kx)$ 與 $y=f(x)$ 同樣切x軸，所以 $f(kx)$ 的係數應該同樣滿足條件等式，但

$$f(kx)=ak^3x^3+3bk^2x^2+3ckx+d$$

所以，原來條件等式中的各項依次改變如下：

a^2d^2 變成 $(ak^3)^2d^2=a^2d^2k^6$

$abcd$ 變成 $(ak^3)(bk^2)(ck)d=abcdk^6$

b^3d 變成 $(bk^2)^3d=b^3dk^6$

ac^3 變成 $(ak^3)(ck)^3=ac^3k^6$

b^2c^2 變成 $(bk^2)^2(ck)^2=b^2c^2k^6$

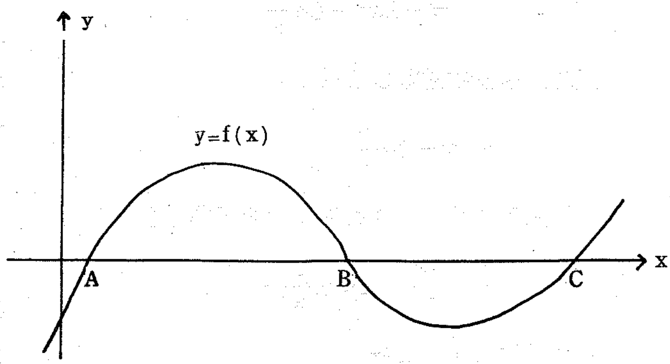
把a，b，c，d依次加權，而不論把k的權定爲多少，規律㈢都滿足。

規律㈠則比較特別，它其實是連方程式有個三重根時都滿足的，譬如說 $a=b=c=d=1$ 時，即方程式爲 $x^3+3x^2+3x+1=0$ 時就滿足規律㈠。甚至於 $(x+1)^n=0$ 都滿足此規律。

看了上述由幾何觀點所作的解釋，讀者諒已能體會到，數學基本訓練夠的人，由於對上述的幾何運作非常熟悉，所以他們並不需要知道這些規律都能加以應用。作爲以上說明的應用，讓我們看：

$$ax^3+3bx^2+3cx+d=0$$

的一根恰在另兩根的中點的條件等式。注意到，



由於一根剛好位於另二根的中點的事實，並不因爲我們把橡皮（假設上圖也是畫在橡皮上）沿x軸或y軸方向拉長或縮短，而有所改變，同時 $(x+1)^3=0$ 的一根也可以看成恰在另兩根的中點，所以我們求出來的條件等式，也應該滿足上述的三條規律。

下面，讓我們來求這個條件等式（數學文章的讀者應該養成良好的習慣，在這種地方立刻停下，不要再談下去，自己拿出紙和筆，立刻算一算，到算出來或自己覺得實在算不出來的時候才

接下去讀）。這個條件等式的求法相當簡單：設其三根爲$\beta-t$，β，$\beta+t$，則有

$$
\begin{aligned}
&ax^3+3bx^2+3cx+d\\
&\quad=a(x-\beta+t)(x-\beta)(x-\beta-t)
\end{aligned}
$$

把上式等號右邊展開，比較兩邊係數可得

$$\frac{b}{a}=-\beta \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑦$$

$$3\frac{c}{a}=3\beta^2-t^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑧$$

$$\frac{d}{a}=-\beta^3+t^2\beta \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑨$$

把⑦式代入⑧式，移項可得

$$t^2=3\frac{b^2-ac}{a^2}$$

把此式與⑦式代入⑨式化簡可得條件等式如下：

$$2b^3-3abc+a^2d=0$$

請讀者立刻檢查一下：我們求出來的條件等式，是否滿足上述的三條規律？

由此看來，這三條規律開始雖然不太起眼，後來却越來越有味道。數學中尋找的規律，是適用的範圍越廣，規律越好越重要。但要達到這個地步，就得作更強烈的抽象，使所談到的規律脫離具體的實例，所以看起來令人覺得很空洞，很不起眼。

有趣的是，把問題越抽象，解決起來常常反而越容易，非數學圈內人常不能理解這件事。下面，我們以一個簡單的例子來說明此事：設有甲、乙兩容器，甲容器中盛有 10 杯水，乙容器中則有 10 杯酒。現把甲容器的水倒一杯到乙容器，攪勻後再從乙容器中倒一杯酒和水的混合液體到甲容器。問現在甲容器中的水，和乙容器中的酒是否一樣多？

計算是連小學六年級的學生都會的：乙容器原有 10杯酒，加入一杯水後變成11 杯，攪勻後的一杯包含了 $\frac{1}{11}$ 杯的水，加入甲容器後，連同甲容器中原有的 9 杯水，共有 $9+\frac{1}{11}$ 杯水。而乙容器的酒量，則是 $10-\frac{10}{11}=9\frac{1}{11}$ 杯，所以相等。

這樣的解決方法並沒有不對，問題在於解決後使人感到答案很湊巧，好像問題是湊出來的一樣。如果我們改變一下解法，則不會使人有這種感覺：最後甲乙兩容器一樣有 10 杯，甲容器中損失的水一定跑到乙容器中去了，而乙容器中損失的酒一定跑到甲容器。如果它們損失的量不一樣多，則兩容器最後的液體量一定無法一樣。例如，甲損失 x 杯水，乙損失 y 杯酒，則

$$\left.\begin{aligned}&\text{甲最後的液量是}\quad 10-x+y=10\\&\text{乙最後的液量是}\quad 10+x-y=10\end{aligned}\right\}\Rightarrow x=y$$

這種說法其實就是物理中的最基本的定律“質量不滅定律”。

由這種說法看來，甲乙兩容器中的水量和酒量並不一定要 10 杯（任意杯都可以），而且倒來倒去的過程可以隨意，不一定只限於一次來回（只要最後兩容器中的液量一樣多就可以了），甚至於倒來倒去之後也不用攪勻。

可以看到，如果問題提出來時，是採用上段的敍述法，問題顯然變的抽象了（無法實際計算；也無法想像其操作），但解決後所得到原則規律，其適用性就廣泛的多，而且解決的手段也容易多了（至少不用任何計算）。其實，現在所謂高等的數學，所走的路子就是沿着這個方向發展的。 □