自然數高次級數和的一般解問題 －上－

黃錦富
台北市立芳和國民中學

平常，吾人在研讀數學時，會碰到級數方面之問題，因爲它是解決問題的有力工具。不論是有限級數或無限級數，同樣都是自然科學必須的一門學問。然吾人若以一些經常接觸但簡單有效的例子來說，就時有令人困惑的難關：

例如：

① $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

② $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

④ $\sum_{k=1}^{n} k^4 = 1^4+2^4+3^4+\cdots\cdots+n^4 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

由上面例子，我們發現有很多方向可探討，而在本文中，則企圖知道：若將級數和推廣到：對於任何正整數 s，則 $\sum_{k=1}^{n} k^s$ 之值的型式如何？看看若令 $f_s(n)=\sum_{k=1}^{n} k^s$ 時，（爲了方便，可稱之爲自然數之高次級數和，本文符號即以 $f_s(n)$ 表示），當 $s=1$，則 $f_1(n)=\sum_{k=1}^{n} k=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 爲 n 之二次多項式，當 $s=2,3,4$ 時，$f_s(n)$ 亦分別爲三次，四次，五次多項式，那麼對於任何 s 而言，$f_s(n)$ 是否必爲 n 之 $s+1$ 次多項式呢？即使如此，其多項式中各係數又與那些變數有關呢？可否導出其一般表示方法呢？

從一個很直覺的意識裏，大部份的人都會覺得這例子很簡單，只要我們能證明 $\sum_{k=1}^{n} k^s$ 必爲 n 之 $s+1$ 次的多項式，則吾人恒可利用 $\sum_{k=1}^{n} k\cdot(k+1)\cdot(k+2)\cdots\cdots\cdot(k+s-1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+s)}{s+1}$ ……（以(A)式表示）的事實，就逐漸由 $s=1,2,3\cdots\cdots$ 等知道

任何 $f_s(n)$ 的一般式了。

因為我們可由純粹的數學歸納法，證明(A)式為一恒等式，故若以此(A)式作一已知的基礎，則如下例之方法，吾人即可逐一求得任何 $\sum_{k=1}^{n} k^s$ 的一般式，就如①到④式等均是：

如：若 $s=1$，A式 $=\sum_{k=1}^{n} k=\dfrac{n(n+1)}{1+1}=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 為已知，（即此等式恰為①式恒等式）

則，當 $s=2$ 時，A式 $=\sum_{k=1}^{n} k(k+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{2+1}$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} k^2+\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\text{即} \sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

此等式恰為上面的②式恒等式。

同理，令 $s=3,4,5$……時，則可分別求得 $\sum_{k=1}^{n} k^3$，$\sum_{k=1}^{n} k^4$，$\sum_{k=1}^{n} k^5$，……等之一般式。

一、自然數高次級數和的直接展開

設 $f_s(n)$ 是 n 之 $s+1$ 次多項式，其各係數吾人用 a_k 來表示之，稱 a_k 為 $f_s(n)$ 之第 k 項展開係數，則可得 $f_s(n)=\sum_{k=1}^{n} k^s=\sum_{k=0}^{s+1} a_k n^k$，現在我們雖得到此表示法，却仍發生若干問題；①吾人如何根據此式，加以應用而求出各項展開係數之關係？②若單獨視查 $f_1(n)$，$f_2(n)$，$f_3(n)$…… 等時，發現我們現在所定義出的展開係數 a_k 亦與 s 有關，即當 s 不同或改變時，a_k 亦隨之改變，那麼此表示法是否又有問題了？③再看，若 s 由1至任意正整數時，$f_s(n)$ 均有一共通的特性，即 $f_s(1)=1^s=1$，但若為方便，從形式上勉強令 $n=0$，則 $f_s(0)=a_0$，a_0 在 s 可為任意正整數的情況下，其值應為多少？

首先，我們探求一下第二個問題：不錯，對於不同的 s 值，a_k 確實隨 s 而改變，故至少 a_k 應表達成 a_k^s，$a_k(s)$，及 $a_s(k)$，才是眞正最正確的表達方式，但在本文中，先固定某正整數 s，而仍簡記為 a_k。

再看第一問題：這是令人頭痛的問題，吾人究竟應利用何種級數性質，來探求係數間的關係呢？當吾人在書寫 $f_s(n)=\sum_{k=1}^{n} k^s$ 之展開式時，是否曾注意到：此級數的各項數列，可用 n^s 一般表示之，即然如此，則吾人恒可得一關係式 $f_s(n)-f_s(n-1)=n^s$，此式即足以展開吾人的探索工作了。

第三問題：對於 $n=0$ 時，$f_s(0)=a_0$，而 a_0 之值為若干？其實在 $f_s(n)-f_s(n-1)=n^s$ 中，即暗示了我們，若令 $n=1$ 時，$f_s(1)-f_s(0)=1^s=1$，得 $a_0=0$ 在形式上恒可成立。所以我們可重

新定義：

$$f_s(n)=\sum_{k=1}^{n}k^s=\sum_{k=1}^{s+1}a_kn^k \cdots\cdots (1\text{-}1)$$

將（1-1）式代入 $f_s(n)-f_s(n-1)=n^s$，可得到下列結果：

$$\sum_{k=1}^{s+1}\sum_{m=1}^{k}(-1)^{m+1}C(k,m)a_kn^{k-m}=n^s \cdots\cdots (1\text{-}2)$$

若要比較上面等式兩邊之係數時，吾人注意到左式 n 之冪次 $k-m$ 必需決定才行，但要如何決定呢？先看看 k 爲最大值 $s+1$，m 爲最小值 1 時，$k-m=s$，故在左式完全展開時，則必爲 s 次多項式，爲方便我們令 $k-m=r$，（$0\le r\le s$），則（1-2）式變化成：

$$\sum_{r=0}^{s}\left[\sum_{k>r}^{s+1}(-1)^{k-r+1}C(k,k-r)a_k\right]n^r=n^s \cdots\cdots (1\text{-}3)$$

從（1-3）式中，可比較係數得以下結果：

$$\sum_{k>r}^{s+1}(-1)^{k-r+1}C(k,k-r)a_k=\begin{cases}1\text{，若 } r=s\\0\text{，若 } r\neq s\end{cases} \cdots\cdots (1\text{-}4)$$

其中 $C(k,k-r)$ 代表組合式 $\dfrac{k!}{(k-r)!\,r!}$

綜合以上之討論，吾人可分別由（1-1）式，（1-4）式中，令 $n=1$ 或 $r=0$ 而得以下二則 $f_s(n)$ 多項式係數之性質：

(a) $\sum_{k=1}^{s+1}a_k=1$，　(b) $\sum_{k=1}^{s+1}(-1)^{k+1}a_k=0$

另由(a)(b)，又可合起來求出第三則關係性質：

(c) $\sum_{k=\text{奇數}}^{s+1}a_k=\sum_{k=\text{偶數}}^{s+1}a_k=\dfrac{1}{2}$

這是首次知道係數之性質的三則關係。

二、係數關係之突破

觀察（1-4）式，吾人發現：雖係數關係已知，但亦頗爲複雜，爲確實了解（1-4）式之整個性質，我們做了以下的嘗試：

(a)設 $r=s$，則唯一可得一組解是 $(k,m)=(s+1,1)$ 將 $k=s+1$ 代入（1-4）式得：

$$(-1)^{1+1}C(s+1,1)a_{s+1}=1,\quad \Rightarrow a_{s+1}=\frac{1}{s+1} \cdots\cdots (2\text{-}1,a)$$

(b)設 $r=s-1$，則 k 可含有 s，$s+1$ 兩項代入（1-4）式得 $(-1)^2c(s,1)a_s+(-1)^3c(s+1,$

2) $a_{s+1}=0$，將(2-1,a)代入又得

$$sa_s=\frac{(s+1)s}{2!}\times\frac{1}{s+1}=\frac{s}{2}\quad\Rightarrow\quad a_s=\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{-}1,b)$$

(c)設 $r=s-2$，則 k 可含有 $s-1$，s，$s+1$ 三項，代入(1-4)式得 $(-1)^2C(s-1,1)a_{s-1}+(-1)^3C(s,2)a_s+(-1)^4C(s+1,3)a_{s+1}=0$ 將(2-1,a,b)代入得

$$(s-1)a_{s-1}=\frac{s(s-1)}{2!}\times\frac{1}{2}-\frac{(s+1)s(s-1)}{3!}\times\frac{1}{s+1}$$

$$\Rightarrow\quad a_{s-1}=\frac{s}{12}\cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{-}1,c)$$

(d)設 $r=s-3$，則 k 可含有 $s-2$，$s-1$，s，$s+1$ 等四項代入(1-4)式得：

$$(-1)^2C(s-2,1)a_{s-2}+(-1)^3C(s-1,2)a_{s-1}+(-1)^4C(s,3)a_s$$
$$+(-1)^5C(s+1,4)a_{s+1}=0$$

將(2-1,a,b,c)代入得

$$(s-2)a_{s-2}=\frac{(s-1)(s-2)}{2!}\times\frac{s}{12}-\frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\times\frac{1}{2}$$
$$+\frac{(s+1)s(s-1)(s-2)}{4!}\times\frac{1}{s+1}$$

$$\Rightarrow\quad a_{s-2}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{-}1,d)$$

(e)設 $r=s-4$，則 k 可含有 $s-3$，$s-2$，$s-1$，s，$s+1$ 等五項，代入(1-4)式得：

$$(-1)^2C(s-3,1)a_{s-3}+(-1)^3C(s-2,2)a_{s-2}+(-1)^4C(s-1,3)a_{s-1}$$
$$+(-1)^5C(s,4)a_s+(-1)^6C(s+1,5)a_{s+1}=0$$

將(2-1,a,b,c,d)代入得

$$(s-3)a_{s-3}=\frac{(s-2)(s-3)}{2!}\times 0-\frac{(s-1)(s-2)(s-3)}{3!}\times\frac{s}{12}$$
$$+\frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{4!}\times\frac{1}{2}-\frac{(s+1)s(s-1)(s-2)(s-3)}{5!}\times\frac{1}{s+1}$$

$$\Rightarrow\quad a_{s-3}=-\frac{1}{720}s(s-1)(s-2)\cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{-}1,e)$$

爲了節省篇幅，我們僅將前五項列出，而其後之各係數僅寫出結果：

$$a_{s-4}=0\ ,\ a_{s-5}=\frac{s(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)}{6\times 7!}\ ,\ a_{s-6}=0\ ,$$

$$a_{s-7}=-\frac{3}{10\times 9!}s(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)(s-5)(s-6)\ ,\ a_{s-8}=0\ ,\cdots\cdots。$$

歸納上面的 a 數列，可發現 a 數列有以下性質：

① $f_s(n)$ 多項式中，n 之展開係數 a_k，實可表達成 s 之多項式。（除 $a_{s+1}=\dfrac{1}{s+1}$ 以外）

②雖 a 數列可爲 s 之多項式，但若令 $A_k(s)=\prod_{l=1}^{k}(s-l+1)$ 時，則似有 $a_{s-k}=b_kA_k(s)$，其中 b_k 係與 s 及 n 無關之常數，它僅與 k 變數有關。爲方便，此時若令 k＝－1 時，$b_{-1}=1$，$A_{-1}(s)=\dfrac{1}{s+1}$，則對於 k＝－1，0，1，2……而言，$a_{s-k}=b_kA_k(s)$ 可成立。

③另，由（2-1 之 b,c,d,e）四式裏，當 $a_{s-k}=b_kA_k(s)$，似可查覺到下列之關係：

$$b_k=\frac{b_{k-1}}{2!}-\frac{b_{k-2}}{3!}+\frac{b_{k-3}}{4!}-\frac{b_{k-4}}{5!}+\cdots\cdots+(-1)^{k+1}\frac{b_0}{(k+1)!}+(-1)^{k+2}\frac{b_{-1}}{(k+2)!}$$

若用級數和表示，則爲 $b_k=\sum_{l=1}^{k+1}\dfrac{(-1)^{l+1}b_{k-l}}{(l+1)!}$ ………………………………(2-2)

④對於所有 k 爲偶數者（除 0 外），似可有 $b_k=0$。

以上四則性質，每一則要證明均不太容易。不過爲本文之主旨，我們先綜合一下上述四則性質，所能得到的定理㈠。

※定理㈠：設 $f_s(n)=\sum_{k=1}^{n}k^s=\sum_{k=1}^{s+1}a_kn^k$，則①可令 $a_{s-k}=b_kA_k(s)$，其中吾人定義：$b_{-1}=1$，

$A_{-1}(s)=\dfrac{1}{s+1}$ 且 $A_k(s)=(s-k+1)A_{k-1}(s)$，且②必得恒等式

$$b_k=\sum_{l=1}^{k+1}\frac{(-1)^{l+1}}{(l+1)!}b_{k-l}$$

由定理㈠之②結論，亦可知 $b_{k-1}=\sum_{l=1}^{k}\dfrac{(-1)^{l+1}}{(l+1)!}b_{k-l-1}$ 然，此即代表 $b_{k-1}=\sum_{l=2}^{k+1}\dfrac{(-1)^{l}}{l!}b_{k-l}$ 亦可成立，兩邊各減 b_{k-1} 吾人又可得到以下之推論㈠。

※推論㈠：同上假設，亦可證得 $\sum_{l=1}^{k+1}\dfrac{(-1)^{l}}{l!}b_{k-l}=0$，對於所有 $k\in N$。

這是一項係數間關係之突破，因爲我們經由定理㈠，已使得係數 a_k 轉化爲 b_k，且 b_k 與 n，s 兩變數均無關係。然而，現在又出現了另一新的大問題：究竟此時 b 數列應如何用 k 變數一般表示之？各位讀者將發現（2-2）式之探討，不是一件很容易的事。

三、冪級數應用在部份序和時

由於前節 (2-2) 式，我們得－b數列本身是爲前項數列之級數和，此種性質乃屬遞迴性質中較複雜問題之典型，是故使我們在級數和探討裏，遇到了最基本且最困擾的障礙：即依據遞迴性質所定義出來的數列，若欲由定義本身尋找一般表示法，則往往只能演化成更複雜，更難理解的表示法，如：吾人將 (2-2) 式演化的結果，除可得到推論(一)外，另還可得到 $b_k=\sum_{l=1}^{k+1}\left[\frac{(-1)^l}{l!}b_{k-l}\times\left(\frac{l}{l+1}\right)\right]$，這是比較複雜的結果，如果有實際演練經驗的人，必發現要演化成更簡捷的形式是很難很難的，那麼究竟應如何處理這問題呢？

由上之討論，吾人想到兩個可能性：①是否某些級數中，本身就存有極不可能以簡單形式表示的。〔註一〕。②若有某些級數，不能以簡單形式表示，則是否可另用某種方法，將它轉化爲其他較易了解的形式。

若確定上述兩則是可能的，則我們即可搜集資料比較看看，用那種方法可達到第②則之目的。以下是我們所知道冪級數方面的一些性質。

性質(一)：設有函數 $f(x)$，當 x 在一個數值 c 附近的時候，可以被展開成 X－c 的冪級數：即

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(c)}{n!}(x-c)^n$，其中 $f^n(x)$ 代表 $f(x)$ 的第 n 次導數〔註二〕。此類展開級數稱爲泰勒級數，甚至當 $c=0$ 時，$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(0)}{n!}x^n$，特稱爲麥克勞寧級數。

由性質(一)，讓我們知道：對於 $f(x)\in C^\infty$（指任意階可微分之函數類集），常可分解爲 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(0)}{n!}x^n$ 型式之冪級數。當然，若要考慮更嚴密情況時，應當知道收斂區間的範圍在那裏？及 $\xi\epsilon(0,x)$ 區間時，$\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$ 是否在 $n\to\infty$ 時，極限值爲零？但在本文中，一律在先忽略這些條件之重要性，而進行必要的探討工作。

性質(二)：設有兩個冪級數 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$，則 $f(x)\cdot g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$，其中 $c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$。

性質(三)：設有一冪級數 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，則對於 $n=0,1,2,\cdots\cdots$，恒有 $a_n=\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dx^n}(f(x))\right]_{x=0}$ 之關係。

從性質(二)，初看起來，沒什麼奧妙之處，但仔細看看後面的 $c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$，發現它對於級數和的求法，或許有些幫助，而此種 c_n 包含了兩個特點：① c_n 是由兩個數列之乘積，再取和而成。②此兩數列乘積中，一個是由第 0 項取至第 n 項。（$k=0$ 時，a_0, b_0 分別稱爲 a，b 數列之第 0 項），

另一個是由第 n 項倒取至第 0 項，即它們分別對應著 k，及 n－k 之註標（index），這個特性，恰好能與（2-2）式演化如下：

$$b_k=\sum_{l=1}^{k}\frac{(-1)^{l+1}}{(l+1)!}\,b_{k-l}=\sum_{l=0}^{k}\frac{(-1)^{l+2}b_{k-(l+1)}}{(l+2)!}$$

$$=\sum_{l=0}^{k}\frac{(-1)^{l+2}b_{(k-1)-l}}{(l+2)!}$$

為清晰比較起見，將上述註標中 k 換成 n，ℓ 換成 k，則可變成：

$$b_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+2}b_{n-1-k}}{(k+2)!}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3\text{-}1)$$

此時，將（3-1）式與性質(二)對照一下知，若令

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}}{(n+2)!}x^n,\qquad g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_{n-1}x^n$$

則 $$f(x)\cdot g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+2}b_{n-1-k}}{(k+2)!}\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$$

觀察 $f(x)\cdot g(x)$ 與 $g(x)$ 之關係，知道它們還有下列之關係：

$x f(x)\cdot g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n+1}=g(x)-b_{-1}x^0$，然因 $b_{-1}=1$，所以 $(xf(x)-1)g(x)=-1$ 得

$$g(x)=\frac{1}{1-xf(x)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3\text{-}2)$$

根據（3-2）式，使我們了解一件事實：雖然欲直接求得 b 數列的一般表示法會很困難，但若用 $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_{n-1}x^n$ 的方式，却可大概了解 b 數列所能蘊涵有的性質。當然，要達到此目的，得先求此時的 $f(x)$ 為何種函數，再進一步求出 $g(x)$ 之函數形式。

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}}{(n+2)!}x^n=x^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}}{(n+2)!}x^{n+2}=x^{-2}\left[e^{-x}-1+x\right]\cdots\cdots(3\text{-}3)$$

（3-3）式中，應用了 $e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n$ 之事實，但因 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}}{(n+2)!}x^{n+2}$ 的第 0 項，係由 e^{-x} 之麥克勞寧級數展開的第二項，故乃缺少第 0 項，及第一項，而必須減去成為 $e^{-x}-1+x$。

將（3-3）式代入（3-2）式，並簡化之，可得

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_{n-1}x^n=\frac{xe^x}{e^x-1}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3\text{-}4)$$

※有此（3-4）式，再由性質(三)知

$$b_{n-1}=\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right)\right]_{x=0}=\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{-x}{e^{-x}-1}\right)\right]_{x=0}\cdots\cdots(3\text{-}5)$$ （待續）