規律的覺察與數學的學習

黃宜人
國立臺灣大學數學系

對數學教材中的規律的覺察，相當有助於數學的學習。例如，小學生背九九乘法時，特別容易記得 2 和 5 的乘法，因為其倍數的個位數字，呈現了一種簡單的規律，即 2 的倍數的個位數字都為偶數，而 5 的倍數的個位數字都是 5 或 0 。

想辦法讓小學生發現九九乘法表中的交換律，以便幫助記憶，是目前小學數學教學中的典型活動。前一陣，有位小學老師告訴我，在上述的教學活動中，他的一位學生得到一些出他意料之外的兩個規律如下：

(1) $7\times1=\ 7$……個位數字是 7
$7-4=3$
$7\times2=14$……個位數字是 4
$4-1=3$
$7\times3=21$……個位數字是 1
$8-1=7$
$7\times4=28$……個位數字是 8
$8-5=3$
$7\times5=35$……個位數字是 5
$5-2=3$
$7\times6=42$……個位數字是 2
$9-2=7$
$7\times7=49$……個位數字是 9
$9-6=3$
$7\times8=56$……個位數字是 6
$6-3=3$
$7\times9=63$……個位數字是 3

即在乘法表中，7 的倍數的個位數字都不重複，而相鄰兩位數字的差，呈現了下列很對稱的規律

3，3，7，3，3，7，3，3

(2) $3\times9=27$……個位數字是 7
$3\times8=24$……個位數字是 4
$3\times7=21$……個位數字是 1
$3\times6=18$……個位數字是 8
$3\times5=15$……個位數字是 5
$3\times4=12$……個位數字是 2
$3\times3=\ 9$……個位數字是 9
$3\times2=\ 6$……個位數字是 6
$3\times1=\ 3$……個位數字是 3

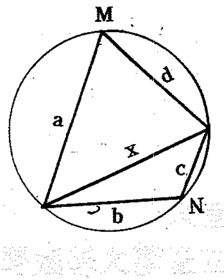
即在九九乘法表中，3 的倍數的個位數字，與 7 的倍數的個位數字剛好顛倒，所以也呈現了上述相同的對稱規律。

老實說，這個發現使我非常驚訝。這個發現雖不見有什麼大用，却帶來一份喜悅。法國數學家何密得（Hermite）曾寫道，在一團亂糟糟的事物中，一條小小規律的覺察，宛如黑暗中摸索時的一線光明，常引導我們到達新的數學天地。

對中小學的學生而言，這個境界也許太高。但無疑的，每條小規律的覺察，都帶來「我找到了」的成就感，這種成就感就是學習數學最好的原動力。至不濟，一條小規律的覺察，也會使人牢牢的記住有關的數學教材。

我從中學畢業已經二十多年了，但我還能記得許多我在高中時做過的數學題目，這些題目都具有令人難忘的規律。由於我在數學界服務，舉一些基本的例子不足以令人信服。下面我舉一個並不太常見的問題，做為例證。這個題目是圓內接四邊形的對角線，如何用四邊長來表達：

試證在下圖中，有 $x^2=\dfrac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$



這個題目的證明很簡單，只用到圓內接四邊形的對角互補，與餘弦定理就可以了，其過程如下

$$M+N=180^\circ \Rightarrow \cos M+\cos N=0$$

$$\cos M=\frac{a^2+d^2-x^2}{2ad}\ ,\ \cos N=\frac{b^2+c^2-x^2}{2bc}$$

$$\therefore\quad \frac{a^2+d^2-x^2}{2ad}+\frac{b^2+c^2-x^2}{2bc}=0$$

由此解出 x^2 就得到要證明的式子。令我感到有趣的是題目中的式子，具有輪換對稱的形式：把四個文字 a ，b ，c ，d 兩兩相配對，有三種方式，即 ab 與 cd ， ac 與 bd ， ad 與 bc ，用加號取代「與」字，就是式子中分母與分子的兩個因式，而在分母的就是以對角線 x 爲分界的配對。

另一個令我難忘的題目是係數與常數項都大的出奇的二元一次聯立方程式

$$\begin{cases}5712x+4288y=14739\\4288x+5712y=85261\end{cases}$$

每一個中等以上的國中學生都能利用消去法，解出上述的問題，只是計算很煩人。我解完後禁不住罵出題的人，不是瘋子就有虐待狂。後來一想，其中或有深意焉。於是平心靜氣定眼一瞧，看出其規律如下：

$$\begin{matrix}ax+by=c\\bx+ay=d\end{matrix}\quad 而且\quad \begin{matrix}a+b=10000\\c+d=100000\end{matrix}$$

這種形態的二元一次聯立方程式解法簡單，只要把兩式相加可得 $x+y=10$，再用此式消去原來一式中的某一文字即可，計算一點也不麻煩。事後只怪自己心太急，看到題目就動手，不肯稍微靜下來想想出題者要考的是什麼。

由此經驗後，我在動手做題目前，一定先考慮一下，出題者到底要解題者顯示何種能力？於是養成了與出題者鬥智的習慣，這種情形有時是很好玩的。在考驗領導教學的今天，也許有許多人感到興趣，所以我把這方面的經驗也提供給讀者做爲參考，下面舉例說明。

例 1 設 $\dfrac{ac-b^2}{a-2b+c}=\dfrac{bd-c^2}{b-2c+d}$

試證兩者都等於 $\dfrac{ad-bc}{a-b-c+d}$

解題的過程是把等式乘開，加上繁長的式子運算（實在不甚有意義，在此就不列出來了）。討厭的是很難猜出題目的來由，出題者很顯然不是由一長串的式子運算中湊出來的（這種機率比中愛國獎券的第一特獎還小）。

式子是有規律的，例如分子都是二次的，而分母則是一次的，分子的 b^2 與 c^2 可看成爲 $b\times b$ 與 $c\times c$，分子的 2b 與 2c 則可看成 $b+b$ 與 $c+c$ 等等。由此更可看出，出題者在爲某種事物找條件，等式於是自然出現。確定此事後，再開始找比較簡潔的解法。

這種問題的另一種解法是，引入一個參數 t 使得

$$\frac{ac-b^2}{a-2b+c}=t\ ,\ \frac{bd-c^2}{b-2c+d}=t$$

把此兩式乘開得

$$ac-b^2=t(a-2b+c),\ bd-c^2=t(b-2c+d)$$

但這兩個式子並沒有引起任何靈感，直到有一天解另一個題目時用到完全平方時，才想起來此兩式可改寫成下列形式後，兩邊加上 t^2，一邊可變

成完全平方，另一邊則可分解因式（下面只寫一式）

$$ac-t(a+c)=b^2-2bt$$

$$ac-t(a+c)+t^2=b^2-2bt+t^2$$

$$(a-t)(c-t)=(b-t)^2$$

由此式知道，$a-t$，$b-t$ 與 $c-t$ 三數為等比數列。同理，另一式也可寫成

$$(b-t)(d-t)=(c-t)^2$$

即 $b-t$，$c-t$ 與 $d-t$ 三數為等比數列。所以，$a-t$，$b-t$，$c-t$，$d-t$ 四數為等比數列，即

$$(a-t)(d-t)=(b-t)(c-t)$$

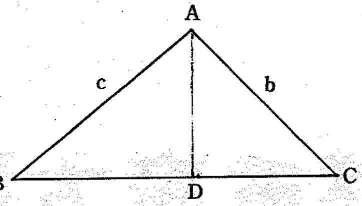
如果把此式乘開，消去等號兩邊的 t^2，解出 t 來就得到要求的式子。我很確定這就是出題者得到此等式的過程。雖然前後花了幾個星期的辛苦思索，但心情愉快無比。

例2 霍氏與奈氏（Hall & Knight）的高等代數（Higher Algebra,劍橋大學出版）是民國四十幾年時，台灣很流行的難題選集，其中有一個題目是：

設 $a=zb+yc$，$b=xc+za$，$c=ya+xb$

試證 $\dfrac{a^2}{1-x^2}=\dfrac{b^2}{1-y^2}=\dfrac{c^2}{1-z^2}$

本題的解法難不住中等以上的高中學生。但我們的興趣在於猜測出題者，如何得到此題。其實，本題的形式雖是個代數題目，但基本上是一個三角題目，個人猜測霍氏與奈氏是如此想的：



在上圖中令 $a=\overline{BC}$，$b=\overline{CA}$，$c=\overline{AB}$

$$x=\cos A,\ y=\cos B,\ z=\cos C$$

則顯然 $a=\overline{BD}+\overline{DC}=b\cos C+c\cos B=zb+yc$

同理 $b=xc+za$，$c=ya+xb$

要證明的式子，則是正弦定理的平方

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

$$\therefore\ \frac{a^2}{\sin^2 A}=\frac{b^2}{\sin^2 B}=\frac{c^2}{\sin^2 C}$$

由於 $\sin^2 A=1-\cos^2 A=1-x^2$

$$\sin^2 B=1-\cos^2 B=1-y^2$$

$$\sin^2 C=1-\cos^2 C=1-z^2$$

代入即得。令人奇怪的是，如此由三角出發的題目，最後的面目看起來與三角完全無關。這是數學出題者最狡猾的地方，我的經驗告訴我，這是數學出題者的通性，數學解題者宜慎乎哉。

本文原想談數學教材中的規律，後來都談到如何與出題者鬥智。雖然有違本意，但是由此可見，數學題目皆有其出處規律，勉強算是離本題不遠。而且，兩者都與「如何在學習數學中找出樂趣」有關。目前中小學的數學教育的缺點，似乎是學生覺得學數學是很痛苦的事情，特此提供小經驗作為數學教學者的參考。 □