科學教育月刊 第 42 期 中華民國七十年 (1981)

遞迴定義函數之研究

呂德根 陸軍官校數學系

本文將提供一個公式，由此公式可將 $f(n)$ 之值直接以 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_l$ 與 $x_0, x_1, \cdots\cdots x_{l-1}$ 等已知值表之

一、內容介紹

最具一般性形式之遞迴定義函數 (recurrence function) 可定義如下：設 $a_1, a_2, \cdots\cdots a_l$ 與 x_0 , x_1 , ……, x_{l-1} 爲任意之實數或複數；對於任意非負整數 $n \leq l-1$ ，定 $f(n) = x_n$ ， 且對於任意非負整數 m，定 $f(m+l) = \sum_{i=1}^{l} a_i f(m+l-i)$ 。本文將提供一個公式，由此公式可將 $f(n)$ 之值直接以 a_1 , a_2 , ……, a_l 與 x_0 , x_1 , …… x_{l-1} 等已知值表之，現將此公式以最簡潔之形式表之如下：

〔定理一〕設方程式 $x^l - a_1 x^{l-1} - a_2 x^{l-2} - \cdots - a_{l-1} x - a_l = 0$ 的 l 個根分別爲 k_1 , k_2 …, …… k_l ，且其均相異，則有

$$f(n) = \begin{vmatrix} 0 & k_l^n & k_{l-1}^n & \cdots & k_1^n \\ x_{l-1} & k_l^{l-1} & k_{l-1}^{l-1} & \cdots & k_1^{l-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2 & k_l^2 & k_{l-1}^2 & \cdots & k_1^2 \\ x_1 & k_l & k_{l-1} & \cdots & k_1 \\ x_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} k_l^{l-1} & k_{l-1}^{l-1} & \cdots & k_1^{l-1} \\ k_l^{l-2} & k_{l-1}^{l-2} & \cdots & k_1^{l-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_l^2 & k_{l-1}^2 & \cdots & k_1^2 \\ k_l & k_{l-1} & \cdots & k_1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} 。 \tag{1}$$

爲方便計，定理一中兩行列式之商以符號 Δ_n 表之，則有下之定理。

〔定理二〕在定理一中，若有 $i \neq j$ 且 $k_i = k_j$ ，則

$$f(n) = \lim_{k_j \to k_i} \Delta_n . \tag{2}$$

甚而，若有不等之三數 i , j , q ，使得 $k_q = k_j = k_i$ ，則

$$f(n) = \lim_{k_q \to k_i} \lim_{k_j \to k_i} \Delta_n , \tag{3}$$

且依此類推。

上面兩定理中，若取 $l = 1$ ，則其顯然成立；若取 $l = 2$ ，則其結果已被證明成立 (見參考資料 2 ，第 4 章第 4 節)，本文末尾之例題一亦提及此結果。

二、定理之證明

〔定理一之證明〕當 $n=0$，$1,2,\cdots$，$l-1$ 時，$\Delta_n = x_n$ 顯然成立。本證明僅需再指出：對於任意整數 $n \geq 0$，則有 $\Delta_{n+l} = \sum_{i=1}^{l} a_i \Delta_{n+l-i}$ 即可。由行列式之基本性質易知

$$\sum_{i=1}^{l} a_i \Delta_{n+l-i} = -\left|\begin{matrix} 0 & \sum_{i=1}^{l} a_i k_l^{n+l-i} & \sum_{i=1}^{l} a_i k_{l-1}^{n+l-i} & \cdots & \sum_{i=1}^{l} a_i k_1^{n+l-i} \\ x_{l-1} & k_l^{l-1} & k_{l-1}^{l-1} & \cdots & k_1^{l-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2 & k_l^2 & k_{l-1}^2 & \cdots & k_1^2 \\ x_1 & k_l & k_{l-1} & \cdots & k_1 \\ x_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{matrix}\right| \Bigg/ \left|\begin{matrix} k_l^{l-1} & k_{l-1}^{l-1} & \cdots & k_1^{l-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_l^2 & k_{l-1}^2 & \cdots & k_1^2 \\ k_l & k_{l-1} & \cdots & k_1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{matrix}\right| 。 \tag{4}$$

而且，對於 $t=1$，$2\cdots$，l，

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{l} a_i k_t^{n+l-i} &= \sum_{i=1}^{l}\left(\sum_{l \geq n_1 > n_2 > \cdots > n_i \geq 1} (-1)^{i+1} k_{n_1}k_{n_2}\cdots k_{n_i}\right) k_t^{n+l-i} \\ &= \sum_{i=1}^{l}\left(\sum_{\substack{l \geq n_1 > n_2 > \cdots > n_i \geq 1 \\ n_j \neq t,\ j=1,2,\cdots,i}} (-1)^{i+1} k_{n_1}k_{n_2}\cdots k_{n_i}\right) k_t^{n+l-i} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{l}\left(\sum_{\substack{l \geq n_1 > n_2 > \cdots > n_{i-1} \geq 1 \\ n_j \neq t,\ j=1,2,\cdots,i-1}} (-1)^{i+1} k_{n_1}k_{n_2}\cdots k_{n_{i-1}}\right) k_t^{n+l-i+1} \end{aligned}$$

且 $\sum_{\substack{l \geq n_1 > n_2 > \cdots > n_i \geq 1 \\ n_j \neq t,\ j=1,2,\cdots,i}} (-1)^{i+1} k_{n_1}k_{n_2}\cdots k_{n_i}$ 之值，當 $i=l$ 時，其值為 0；當 $i=0$ 時，其值為 1。因此可得

$$\sum_{i=1}^{l} a_i k_t^{n+l-i} = k_t^{n+l}，t=1，2，\cdots，l。 \tag{5}$$

由(4)式與(5)式之結果可證得 $\sum_{i=1}^{l} a_i \Delta_{n+l-i} = \Delta_{n+l}$，因此證得(1)式成立，亦即本定理得證。

〔定理二之證明〕不失其一般性之情況下，我們可以取 $k_i = k_1$ 與 $k_i = k_2$，本文僅證明，當 $k_2 = k_1$ 時，$f(n) = \lim_{k_2 \to k_1} \Delta_n$ 成立，至於本定理其餘部份之證明可由類似之方法證得，本文予以省略。使用羅必塔法則（L'Hospital's rule）與行列式之導函數的性質（見參考資料 1，第 1 章第 7 節

），可得知

$$\lim_{k_2\to k_1}\Delta_n=-\frac{\begin{vmatrix} 0 & k_l^n & k_{l-1}^n & \cdots & k_3^n & nk_1^{n-1} & k_1^n \\ x_{l-1} & k_l^{l-1} & k_{l-1}^{l-1} & \cdots & k_3^{l-1} & (l-1)k_1^{l-2} & k_1^{l-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ x_2 & k_l^2 & k_{l-1}^2 & \cdots & k_3^2 & 2k_1 & k_1^2 \\ x_1 & k_l & k_{l-1} & \cdots & k_3 & 1 & k_1 \\ x_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k_l^{l-1} & k_{l-1}^{l-1} & \cdots & k_3^{l-1} & (l-1)k_1^{l-2} & k_1^{l-1} \\ k_l^{l-2} & k_{l-1}^{l-2} & \cdots & k_3^{l-2} & (l-2)k_1^{l-3} & k_1^{l-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ k_l^2 & k_{l-1}^2 & \cdots & k_3^2 & 2k_1 & k_1^2 \\ k_l & k_{l-1} & \cdots & k_3 & 1 & k_1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}\text{。}$$

而且，當 $n=0,1,2,\cdots,l-1$ 時，$\lim\limits_{k_2\to k_1}\Delta_n=x_n$ 顯然成立。當 $k_2=k_1$ 時，我們以 $\overline{a_i}$ 表 a_i，則有

$$\lim_{k_2\to k_1}\sum_{i=1}^{l}\overline{a_i}\,\Delta_{n+l-i}=\sum_{i=1}^{l}\lim_{k_2\to k_1}\overline{a_i}\,\Delta_{n+l-i}$$

$$=-\begin{vmatrix} 0 & \sum\limits_{i=1}^{l}\overline{a_i}\,k_l^{n+l-i} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{l}\overline{a_i}\,k_3^{n+l-i} & \sum\limits_{i=1}^{l}\overline{a_i}(n+l-i)k_1^{n+l-i-1} & \sum\limits_{i=1}^{l}\overline{a_i}\,k_1^{n+l-i} \\ x_{l-1} & k_l^{l-1} & & k_3^{l-1} & (l-1)k_1^{l-2} & k_1^{l-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_2 & k_l^2 & \cdots & k_3^2 & 2k_1 & k_1^2 \\ x_1 & k_l & \cdots & k_3 & 1 & k_1 \\ x_0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\cdot D^{-1} \qquad (6)$$

(6)式中之 D 爲上面 $\lim\limits_{k_2\to k_1}\Delta_n$ 式中，位於分母之行列式。其次，我們在定理一之證明中已證得

$\sum\limits_{i=1}^{l}a_i k_t^{n+l-i}=k_t^{n+l}$，$t=1,2,\cdots,l$，因此亦可得證 $\sum\limits_{i=1}^{l}\overline{a_i}\,k_t^{n+l-i}=k_t^{n+l}$，$t=1,2,\cdots,l$，(7)

其次，因爲 $\sum\limits_{l\geq n_1>n_2>\cdots>n_i\geq 3}k_{n_1}k_{n_2}\cdots k_{n_i}$ 之值，當 $i=l,\ l-1,\ -1$ 時，其値爲 0；且當 $i=0$ 時，其値爲 1。因此可得

$$\sum_{i=1}^{l} \overline{a_i}\,(n+l-i)\,k_1^{n+l-i-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \Big[\sum_{l \geq n_1 > n_2 > \cdots > n_i \geq 3} (-1)^{i+1} k_{n_1} k_{n_2} \cdots k_{n_i} + \sum_{l \geq n_1 > n_2 > \cdots > n_{i-1} \geq 3} (-1)^{i+1} 2 k_{n_1} k_{n_2} \cdots k_{n_{i-1}} k_1$$

$$+ \sum_{l \geq n_1 > n_2 > \cdots > n_{i-2} \geq 3} (-1)^{i+1} k_{n_1} k_{n_2} \cdots k_{n_{i-2}} k_1^2 \Big] (n+l-i)\, k_1^{n+l-i-1}$$

$= 2\,(n+l-1)\,k_1^{n+l-1} - (n+l-2)\,k_1^{n+l-1} = (n+l)\,k_1^{n+l-1}$。因此我們證得

$$\sum_{i=1}^{l} \overline{a_i}\,(n+l-i)\,k_1^{n+l-i-1} = (n+l)\,k_1^{n+l-1} \tag{8}$$

由(6)，(7)與(8)三式之結果，我們證得

$$\lim_{k_2 \to k_1} \sum_{i=1}^{l} \overline{a_i}\,\Delta_{n+l-i} = \lim_{k_2 \to k_1} \Delta_{n+l}$$

，因此得證 $f(n) = \lim_{k_2 \to k_1} \Delta_n$ 當 $k_2 = k_1$ 時成立，而完成本定理之證明。

三、例 題

〔例題一〕在定理一與定理二中，若取 $l = 2$，則有

$$f(n) = -\begin{vmatrix} 0 & k_2^n & k_1^n \\ x_1 & k_2 & k_1 \\ x_0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} k_2 & k_1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = [\,(x_1 - x_0 k_1)\,k_2^n - (x_1 - x_0 k_2)\,k_1^n\,] / (k_2 - k_1)$$

當 $k_1 \neq k_2$ 時成立；而且當 $k_1 = k_2$ 時，

$$f(n) = -\begin{vmatrix} 0 & n k_1^{n-1} & k_1^n \\ x_1 & 1 & k_1 \\ x_0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & k_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = n k_1^{n-1}\,(x_1 - x_0 k_1) + k_1^n x_0 = n x_1 k_1^{n-1} - n x_0 k_1^n$$

$+ x_0 k_1^n$ 此等結果與參考資料 2 所列者完全相同。

〔例題二〕著名的 Fibonacci 數 F_0，F_1，F_2，…，其定義如下：$F_0 = 0$，$F_1 = 1$ 且 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$，$n \geq 0$。於此，我們得知 $x^2 - x - 1 = 0$，$k_1 = (1 - \sqrt{5})/2$，$k_2 = (1 + \sqrt{5})/2$，而且由定理一可得

$$F_n = -\begin{vmatrix} 0 & [(1+\sqrt{5})/2]^n & [(1-\sqrt{5})/2]^n \\ 1 & (1+\sqrt{5})/2 & (1-\sqrt{5})/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} (1+\sqrt{5})/2 & (1-\sqrt{5})/2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1/\sqrt{5})\,\{[(1+\sqrt{5})/2]^n - [(1-\sqrt{5})/2]^n\}。$$ □

參考資料

1. W.L. Ferrar, Algebra, 2nd ed. Oxford University Press, 1957。
2. I. Niven and H.S.Zuckerman, An Introduction to the Theory of Numbers, 2nd ed., John Wiley and Sons, New York, 1966 .

算經十書是什麼

勇清

我國的學校制度，可考者以隋唐爲最早。現在國立大學很多，但隋唐時都只有一所，隋稱國庠，唐稱國學，數學系則稱爲算學。在唐朝算學中，曾經規定了十二本教科書，它們就是：「周髀算經」、「九章算術」、「孫子算經」、「海島算經」、「五曹算經」、「夏侯陽算經」、「張丘建算經」、「五經算術」、「綴術」、「緝古算經」、「數術記遺」，及「三等數」。除了失傳的「綴術」、「三等數」之外，餘下的統稱爲算經十書。

這十部書，一直是中國數學的骨幹，習算者必讀的寶典。

(1)周髀算經是公認的我國最古老算書，其作者及著作年代皆不可考。只知應在周朝末年與東漢之間。有關直角三角形之三邊長之關係，即所謂的畢氏定理或商高定理，即載於此書中。

(2)九章算經是我國第二部最古老算書，其作者及著作年代也不可考。顧名思義，全書分九章，即方田章、粟米章、衰分章、少廣章、商功章、均輸章，盈不足章、方程章、勾股章。

(3)孫子算經是我國第三部最古老算書，其作者之名及著作年代不可考。近代數論的中國剩餘定理，其雛型即見於此書。

(4)海島算經亦名「重差」，是三國時代劉徽在註釋九章算術時，爲補充勾股章之不足，而增附在書後的資料，對測量海島的高與遠，貢獻甚大。

(5)五曹算經之作者不詳，所謂五曹，乃是田曹、兵曹、集曹、倉曹與金曹，他們分別管理田地、兵役、貿易、倉庫與貨幣。

(6)夏侯陽算經之作者也不可考。此書與五曹算經都沒有任何大的突破。

(7)張丘建算經是南北朝時北魏人張丘建所著。

(8)五經算術是南北朝時北周人甄鸞所著。

(9)綴術是南北朝時劉宋人祖冲之所著，此書業已失傳，不過，隋書律曆志中所載祖冲之求出的圓周率的密率$\frac{355}{113}$之求法，當載於此書中。

(10)緝古算經是唐朝王孝通所著，該書領先世界九百年，最早求解三次方程式。

(11)數術記遺是漢朝人徐岳所著，此書記載有關於魔方陣以及算盤等問題。