一個古典機率定理的證明

國立臺灣教育學院科學教育系數學組　林英雄

一、前　言

這個定理，我最初遇到的時候，是在國立清華大學黃提源教授所編著的大專用書機率論裏頭找到的（見(1)，例 3-7,P.101 ）；但是該書的證明並不完整，當時我也並不很在意。事隔幾年，因爲擔任「機率與統計」課程之便，才在鍾開來先生的名著“ Elementary Probability Theory with Stochastic Processes ”一書中得到完整的證明。同時，我又發現到此定理竟是赫赫有名的大數學家G. P'olya（坡里雅）（生於 1887 年至今，係美國史丹福大學的一位名譽退休教授，他是當代分析大師，在機率論、組合理論及其應用也有很卓越的貢獻）所創的（見(2)，P.129 ）。日後，在執教的幾年中，所教導的學生對此問題多半不會解（可能係因功課壓力太重，沒有太多的時間思考之故）。少數幾個用功的學生提出的解法，是很令人激賞的；但卻屬似是而非（將討論於后，以供大家參考）。

此定理的結果是非常漂亮的，且十分雋永，耐人尋味；但是它的證明並不簡單。不過，它的證明並不需要用到很多的預備知識，祇要稍具機率論的知識（相當于高中學過「機率觀念」的學生的程度）即可了解。

G. P'olya 氏的證法中，符號術語太多，容易讓人看得眼花瞭亂（這是個人的感受，或許是老王賣瓜硬說自己的瓜甜），自己想介紹一種比較直截了當的證法。是否如此，則有待考驗了。

二、本定理的內容

定理：設袋中有 r 個紅球，b 個黑球。每次從袋中任選一球，取出後放回，並加入 c 個同色球。如此重覆了m 次。設袋中每球被選中的機會均等，則此m次中任何一次抽中紅球的機率均與第一次同。換言之，若 R_j 表第 j 次抽中紅球的事件， B_j 表第 j 次抽中黑球的事件，其中 $1 \leqq j \leqq m$。則

$$P(R_j)=\frac{r}{b+r},$$

$$P(B_j)=\frac{b}{b+r}\quad，式中\ 1 \leqq j \leqq m。$$

註：定理中的 c 代表一整數。若 c 爲負，則加入袋中 c 個球即表從袋中扣除 c 個球。當 c = 0 時，表從袋中選球，取後放回。當 c = − 1 時，表從袋中選球，取後不放回。

三、本定理的證明

本定理的證明，主要是根據" Elimination Law"而得的，茲介紹於后：

預備定理(Elimination Law)：設(S, $\mathcal{A}$, P)爲一機率空間，A_i 爲非空的事件，其中 $1 \leqq i \leqq n$。設 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$，且$A_i$ 彼此互斥。又設B爲任一事件，則

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)\text{。}$$

(註：此爲求一事件機率慣用的方法，用樹枝圖表示時，將更容易了解。)

此預備定理在一般機率論的書本裏很容易找到，故其證明從略。

在介紹本定理正式的證明之前，讓我們先看看一些同學錯誤的證明，並設法找出其癥結的所在。

錯誤證法1：當 $j=1$ 時，$P(R_1)=\frac{r}{b+r}$，

$$P(B_1)=\frac{b}{b+r}\text{ 顯然成立。}$$

設 $j=n$ 時，本題成立；即$P(R_n)=\frac{r}{b+r}$，$P(B_n)=\frac{b}{b+r}$。此時袋中原本有 $b+r+(n-2)c$ 個球。故可「想像」袋中原本有 $[b+r+(n-2)c]\cdot\frac{r}{b+r}$ 個紅球(因袋中每球被選中的機會相等，故由拉普拉斯機率定義知，袋中的紅球與黑球個數係依比例而得的。因此些數目均未必爲整數，故稱之爲想像)。依 Elimination Law 知

$$P(R_{n+1})=P(R_n)P(R_{n+1}|R_n)+P(B_n)P(R_{n+1}|B_n)\text{。}$$

$$\text{但}P(R_{n+1}|R_n)=\frac{[b+r+(n-2)c]\cdot\frac{r}{b+r}+c}{b+r+(n-1)c}$$

$$=\frac{r[b+r+(n-2)c]+c(b+r)}{(b+r)[b+r+(n-1)c]}$$

$$P(R_{n+1}|B_n)=\frac{[b+r+(n-2)c]\cdot\frac{r}{b+r}}{b+r+(n-1)c}$$

$$=\frac{r[b+r+(n-2)c]}{(b+r)[b+r+(n-1)c]}\text{。}$$

$$\text{故}P(R_{n+1})=\frac{r}{b+r}\cdot\frac{r[b+r+(n-2)c]+c(b+r)}{(b+r)[b+r+(n-1)c]}$$

$$+\frac{b}{b+r}\cdot\frac{r[b+r+(n-2)c]}{(b+r)[b+r+(n-1)c]}$$

$$=\frac{r[b+r+(n-2)c](r+b)+rc(b+r)}{(b+r)^2[b+r+(n-1)c]}$$

$$=\frac{r[b+r+(n-2)c+c]}{(b+r)[b+r+(n-1)c]}=\frac{r}{b+r}\text{。}$$

$$\therefore P(B_{n+1})=1-P(R_{n+1})=\frac{b}{b+r}\text{。}$$

由數學歸納法知本題得證。

註：此證法的漏洞是球數應爲整數，不能「想像」爲非整數。當然可能有人會辯解說那是期望數，故有非整數的出現。但事實上有更合理的證法，爲何捨棄不用？

錯誤證法2：當 $j=1$ 時，本題顯然成立。

當 $j=2$ 時，依 Elimination Law 得

$$P(R_2)=P(R_1)P(R_2|R_1)+P(B_1)P(R_2|B_1)$$

$$=\frac{r}{b+r}\cdot\frac{r+c}{b+r+c}+\frac{b}{b+r}\cdot\frac{r}{b+r+c}$$

$$=\frac{r(b+r+c)}{(b+r)(b+r+c)}=\frac{r}{b+r}\text{。}$$

$$\therefore P(B_2)=1-P(R_2)=\frac{b}{b+r}\text{。}$$

故 $j=2$ 時，本題亦成立。

設 $1 \leqq j \leqq n$ 時，本題均成立。我們可「想像」此n次試驗獨立，且每次選中紅球的機率完全固定，均爲$\frac{r}{b+r}$。設 A_i 表在重覆的n次中，

共出現 i 次紅球與 n − i 次黑球的事件，其中 $0 \leqq i \leqq n$ 。則 $S=\bigcup_{i=0}^{n} A_i$，且 A_i 彼此互斥。

故由Elimination Law 知

$$P(R_{n+1})=\sum_{i=0}^{n} P(A_i)\ P(R_{n+1}\,|\,A_i)。$$

但 $P(A_i)=\binom{n}{i}\left(\frac{r}{b+r}\right)^{i}\left(\frac{b}{b+r}\right)^{n-i}, 0\leqq i\leqq n$。

（由歸納假設知前面重覆的 n 次試驗中出現紅球的機率均為一常數，即 $\frac{r}{b+r}$）

又 $P(R_{n+1}\,|\,A_i)=\frac{r+ic}{b+r+nc}$

故 $P(R_{n+1})=$

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{r+ic}{b+r+nc}\binom{n}{i}\left(\frac{r}{b+r}\right)^{i}\left(\frac{b}{b+r}\right)^{n-i}。$$

$$=\frac{r}{b+r+nc}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{r}{b+r}\right)^{i}\left(\frac{b}{b+r}\right)^{n-i}$$

$$+\frac{c}{b+r+nc}\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}\left(\frac{r}{b+r}\right)^{i}\left(\frac{b}{b+r}\right)^{n-i}$$

$$=\frac{r}{b+r+nc}\left(\frac{r}{b+r}+\frac{b}{b+r}\right)^{n}$$

$$+\frac{nc}{b+r+nc}\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}\left(\frac{r}{b+r}\right)^{i}\left(\frac{b}{b+r}\right)^{n-i}$$

（由二項定理）

$$=\frac{r}{b+r+nc}+\frac{nc}{b+r+nc}$$

$$\cdot\frac{r}{b+r}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\left(\frac{r}{b+r}\right)^{i}\left(\frac{b}{b+r}\right)^{n-1-i}$$

$$=\frac{r}{b+r+nc}+\frac{nc}{b+r+nc}\cdot\frac{r}{b+r}$$

$$\cdot\left(\frac{r}{b+r}+\frac{b}{b+r}\right)^{n-1} \quad（由二項定理）$$

$$=\frac{r}{b+r+nc}+\frac{nc}{b+r+nc}\cdot\frac{r}{b+r}$$

$$=\frac{r(b+r+nc)}{(b+r)(b+r+nc)}=\frac{r}{b+r}$$

$\therefore P(B_{n+1})=1-P(R_{n+1})=\frac{b}{b+r}$。故由數學歸納法本題得證。

註：此證法雖然可以容易的算出各 $P(R_{n+1}\,|\,A_i)$ 的值，但 $P(A_i)$ 的算法是錯誤的。錯在我們由歸納假設規定前面重覆 n 次試驗中，每次抽中紅球的機率相同而認定此 n 次為獨立的試驗。事實上，此 n 次試驗是不獨立的。當初，G. P'olya 氏研究此一問題的動機是由於醫學上的問題所引起的。他舉出某一地區蔓延某種傳染疾病為例，受害者會產生更多的病菌，而大大增加該病的汚染機會；就如同紅球出現，就會增加更多的紅球（當然係指定理中 $C>0$ 的情形），故各次的試驗是互相影響的。

總之，以上兩種證法顯然是牽強附會的。與其說是做對答案，毋寧說是一種巧合。

本定理的證明：針對上述兩種證法的弊端，我們應該老老實實的證明，不要取巧，仍然用數學歸納法證明如下：當 j = 1 或 2 時，本題均能成立（證明如上所述）。且

(1)…… $P(R_1)=\frac{r}{b+r}$

(2)…… $P(R_2)=\binom{1}{0}\frac{r\cdot r+c}{(b+r)(b+r+c)}$

$$+\binom{1}{0}\frac{b\cdot r}{(b+r)(b+r+c)}=\frac{r}{b+r}$$

現在考慮 j = 3 的情形：

$$P(R_3)=P(A_0)P(R_3\,|\,A_0)+P(A_1)P(R_3\,|\,A_1)$$
$$+P(A_2)P(R_3\,|\,A_2)\ ,$$

其中 A's 的定義方式與前同。

但 $P(A_0)=\binom{2}{0}\frac{r\quad(r+c)}{(b+r)(b+r+c)}$,

$P(A_1)=\binom{2}{1}\frac{b\cdot r}{(b+r)(b+r+c)}$,

	□□
A_0	紅紅
A_1	紅黑
	黑紅
A_2	黑黑

$$P(A_2)=\binom{2}{2}\frac{b\quad b+c}{(b+r)(b+r+c)}。$$

$$\begin{aligned}
故P(R_3)=&\binom{2}{0}\frac{r\quad(r+c)\quad(r+2c)}{(b+r)(b+r+c)(b+r+2c)}\\
&+\binom{2}{1}\frac{b\cdot\ r\ \cdot(r+c)}{(b+r)(b+r+c)(b+r+2c)}\\
&+\binom{2}{2}\frac{b\cdot(b+c)\cdot\ r}{(b+r)(b+r+c)(b+r+2c)}\\
=&\binom{1}{0}\frac{r(r+c)(r+2c)}{(b+r)(b+r+c)(b+r+2c)}\\
&+\binom{1}{0}\frac{b\cdot r(r+c)}{(b+r)(b+r+c)(b+r+2c)}\\
&+\left[\binom{2}{1}-\binom{1}{0}\right]\frac{b\cdot r\cdot(r+c)}{(b+r)(b+r+c)(b+r+2c)}\\
&+\binom{2}{0}\frac{b\cdot(b+c)\cdot r}{(b+r)(b+r+c)(b+r+2c)}\\
=&\binom{1}{0}\frac{r\quad(r+c)\quad[b+r+2c]}{(b+r)(b+r+c)(b+r+2c)}\\
&+\binom{1}{0}\frac{b\cdot\ r\ [b+r+2c]}{(b+r)(b+r+c)(b+r+2c)}\\
=&\frac{r}{b+r}。
\end{aligned}$$

（由 Pascal rule $\binom{2}{1}=\binom{1}{1}+\binom{1}{0}$ 及兩兩項合併，提出公因式，並化簡而得）

故表 j = 3 時本題成立，且

$$\begin{aligned}
(3)\cdots\cdots P(R_3)=&\binom{2}{0}\frac{r\quad(r+c)\quad(r+2c)}{(b+r)(b+r+c)(b+r+2c)}\\
&+\binom{2}{1}\frac{b\ \cdot\ r\ \cdot\ (r+c)}{(b+r)(b+r+c)(b+r+2c)}\\
&+\binom{2}{2}\frac{b\ \cdot\ (b+c)\cdot\ r}{(b+r)(b+r+c)(b+r+2c)}=\frac{r}{b+r}
\end{aligned}$$

成立。

設 j = n 時本題成立，且

$$(n)\cdots\cdots P(R_n)=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\cdot\frac{b\ \cdots[b+(i-1)c]\cdot\quad r\ \cdots[r+(n-1-i)c]}{(b+r)\cdots[b+r+(i-1)c][b+r+ic]\cdots[b+r+(n-1)c]}$$

$$=\frac{r}{b+r}$$

亦成立。（注意：首項的分子不含 b 因子，但仍沿用上式表之）

依 Elimination Law 及上法，可得

$$\begin{aligned}
P(R_{n+1})=&\\
&\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{b\ \cdots[b+(i-1)c]\cdot\quad r\ \cdots[r+(n-i)c]}{(b+r)\cdots[b+r+(i-1)c][b+r+ic]\cdots[b+r+nc]}\\
=&\binom{n-1}{0}\frac{r\ \cdots\cdots\cdots\cdots[r+nc]}{(b+r)\cdots\cdots\cdots\cdots[b+r+nc]}\\
&+\sum_{i=1}^{n-1}\left[\binom{n-1}{i-1}+\binom{n-1}{i}\right]\\
&\times\frac{b\ \cdots[b+(i-1)c]\quad r\ \cdots[r+(n-i)c]}{(b+r)\cdots[b+r+(i-1)c][b+r+ic]\cdots[b+r+nc]}\\
&+\binom{n-1}{n-1}\frac{b\quad(b+c)\cdots\cdots[b+(n-1)c]\quad r}{(b+r)(b+r+c)\cdots\cdots[b+r+(n-1)c][b+r+nc]}\\
=&\binom{n-1}{0}\frac{r\quad(b+c)\quad[r+(n-1)c][b+r+nc]}{(b+r)(b+r+c)\cdots[b+r+(n-1)c][b+r+nc]}\\
&+\binom{n-1}{1}\frac{b\cdot\quad r\ \cdots\ [r+(n-2)c][b+r+nc]}{(b+r)(b+r+c)\cdots[b+r+(n-1)c][b+r+nc]}\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+\binom{n-1}{n-1}\frac{b\cdot\quad r\ \cdots[b+(n-2)c][b+r+nc]}{(b+r)(b+r+c)\cdots[b+r+(n-1)c][b+r+nc]}
\end{aligned}$$

上式係依兩兩相鄰項合併整理而得，恰好提出公因式時，分子部份剩餘的項變為 b+r+nc，而化為(n)式。故由歸納假設知 $P(R_{n+1})=P(R_n)=\frac{r}{b+r}$。故易知 j = n + 1 時本題亦成立，且又證得（n + 1）式成立。依數學歸納法本題恒成立。

四、結　語

我們重述前面的一句話：此定理的證明並不難。如何再進一步把證明的步驟與符號等簡化，

將有助於一般人的接受。此定理的應用價值，在三中錯誤證法 2 的註中有略爲提及，讀者可舉一反三。此外，此定理尚可繼續推廣，且當 $c=-1$ 時，可用更美麗的特殊證法（即引用機率的定義與一機率公式：$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}=\binom{m+n}{k}$）（見(2)，PP. 126～129）。在此不再贅述。□

五、參考文獻

(1)黃提源：機率論　協進圖書有限公司出版。

(2)Kai Lai Chung ：“ Elementary Probability Theory with Stochastic Processes ” 協進。

本中心五、六月大事記

1. 五月一日，中正國防幹部預備學校數學及自然科學實驗班舉行教學研討會，教育部中教司周司長蒞臨指導。
2. 五月八日，基隆市立中正國中自然科學實驗班舉行生物科教學研討會。
3. 五月九日，高雄市立苓雅國中數學科實驗班舉行教學研討會。
4. 五月十四、十八、十九、二十日，本中心與高雄市政府教育局聯合舉辦高雄市科學教師科學研習活動。
5. 五月十五日，高雄市立五福國中自然科學實驗班舉行理化科教學研討會。
6. 本中心接受教育部委辦「中等學校數學及自然科學教材教法研究計畫」於五月下旬分九區舉行座談會，日期與主辦學校分別爲：五月十九日板橋高中，五月廿一日北市一女中，五月廿二日台東高中，五月廿三日台中二中，五月廿五日新竹女中，五月廿六日屏東女中，五月廿七日高雄女中，五月廿八日嘉義高中，五月卅日花蓮女中。主任委員吳大猷先生，國科會科教組黃組長，國教司方司長分別蒞臨北一女中，屏東女中，高雄女中指導。
7. 五月二十日，高中數學課程改進計畫研究委員與教育部科學教育指導委員會數學科諮詢委員舉行聯席會議。
8. 五月廿九日，國中數學科實驗班學生舉行第四次考試。
9. 五月二十六日，高中生物課程改進計畫研究委員與教育部科學教育指導委員會生物科諮詢委員舉行聯席會議。
10. 本中心接受教育部委辦「各級技術及職業學校數學及自然科學課程改進計畫」於六月上旬分六區舉行座談會，日期與主辦學校分別爲：六月二日高雄高工，六月三日嘉義高工，六月四日台中高農，六月八日新竹高工，六月九日三重商工，六月十日北市高工。
11. 六月十二日，中正國防幹部預備學校數學及自然科學實驗班舉行教學研討會。教育部中教司周司長蒞臨指導。
12. 六月十六日，高中生物課程改進計畫研究委員與教育部科學教育指導委員會生物科諮詢委員舉行聯席會議。
13. 六月十七日，高中數學課程改進計畫研究委員與教育部科學教育指導委員會數學科諮詢委員舉行聯席會議。
14. 六月二十日，高中及國中各科課程研究計畫主持人與各科諮詢委員會各科連絡小組舉行聯席會議。
15. 六月二十六日，中正國防幹部預備學校實驗班學生舉行數學科教學研討會。□