

袖珍計算器與數學教學的探討

國立台灣師範大學 數學系 陳冒海

〈壹〉前言

袖珍計算器又稱為手提式計算器(hand-held calculator)，即可握在手中操作之小型電子計算器具。其種類繁多，有的只有 $+$ ； $-$ ； $\times$ ； $\div$ 四個鍵，有的另外還有 π ； $x!$ ； $\frac{1}{x}$ ； $\sqrt{x}$ ； x^2 ； y^x ； $\ln x$ ； e^x ； $\sin x$ ； $\cos x$ ； $\tan x$ ； $\%$ ； $)$ ， $($ （括號）； $\sqrt[y]{y}$ ； $x \leftrightarrow y$ （ x 與 y 互換）； $+/-$ （變號）； K （常數）； C （Clear）； AC （交流電）； MC （Memory clear）； $M+$ （Memory plus）， $M-$ （Memory minus）或 MR （Memory recall）等鍵，有的甚至還可作程式（programming）——按步就班地去完成一連串的運算。其售價亦視其所具備的功能而有所差異。目前一架含有 $+$ ； $-$ ； $\times$ ； $\div$ ； $\%$ ； $M+$ ； $M-$ ； MR 等鍵的袖珍計算器在國內的售價約為新台幣三、四佰元左右。由於售價低廉，功效卓越，而且操作簡單，因而各界人士都樂於使用。無論是銀行、商店、公司、學術單位、工程師、會計師、大專學生，甚至不少家庭都備有袖珍計算器。許多中、小學的學生也能用自己的零用錢購買一架。因此無可諱言地，這種袖珍計算器必會給我國中、小學校的數學教育帶來相當程度的衝擊。為了應付此一情勢，我們實有必要研究一下袖珍計算器在未來的數學教育上將扮演

什麼樣的角色以及它可能會給我們帶來些什麼問題？

我們都知道袖珍計算器對於處理各種有關數值之計算，大有幫助。因而可使教師有更多的時間去闡述數學概念，也可讓學生不必為冗長的數字計算煩惱，而將注意力集中於有關的數學概念上。這對於數學的教與學都能提供莫大的助益。但學生過早使用袖珍計算器，是否會妨礙基本數學概念的學習與基本計算能力的培養呢？那麼我們應該在什麼時候介紹袖珍計算器之使用以及應該介紹到什麼程度才恰當呢？我們是否可以更進一步將袖珍計算器作為教具（不僅是作為輔助計算的工具而已），並發展出配合其使用的數學課程呢？再者，若是要在中、小學階段使用袖珍計算器，我們事前應先作些什麼準備呢？

為了便於探討對這些問題找尋解決這些問題之途徑，讓我們先來看一下美、日、西德等國如何處理此一情勢的情形，他山之石可以攻錯，或許我們可以發現不少值得借鏡的地方。

〈貳〉他山之石

（一）美國

摘自 Marilyn N. Suydam (Director, Calculator Information Center, The Ohio State University) 之報告

- 1975 年初，計算器之售價開始急速下降，美國教育工作者亦開始認真注意計算器在學校內使用的問題。NSF (The National Science Foundation) 關心計算器潛在的衝擊力，資助徹底分析研究計算器將扮演的角色。

- 1976 年 6 月，NIE (The National Institute of Education) 與 NSF 主辦 "Needed Research and Development on Hand-Held Calculator in School Mathematics" 之討論會，擬定今後研究與發展之工作綱領。(1979 年元月又舉辦了第二次討論會)。

- 1976 年為 NSF 進行之一項調查顯示：(這些理由至今仍為大家所引用)

贊同在校內使用計算器的理由為

- (1) 能幫助計算
- (2) 有助於了解與發展數學概念
- (3) 減少記憶之需要
- (4) 有助於問題之求解 (problem solving)
- (5) 引起學習動機
- (6) 有助於探索，了解與學習計算之過程
- (7) 鼓勵發現，探究與創新
- (8) 它們存在

不贊同在校內使用計算器的理由為

- (1) 可能有礙於計算技能之發展*
- (2) 並非每個學生都有
- (3) 可能會造成錯誤的印象—認為數只跟計算有關，且這種計算大多是機械的。
- (4) 對它們可能帶來之影響的 (長程) 研究工作尚不夠充分
- (5) 保養與安全問題

*許多教師與教育工作者認為計算器可幫助學童發展並學習更多的數學技能與概念。

- 1977 年 3 月 NIE 資助成立 The Calculator Information Center 收集並傳播有關計算器之消息 (這種服務 NCTM (The National

Council of Teachers of Mathematics) 在 1974 年左右已開始提供)

- 自 1975 年至 1978 年，在校內使用過計算器與擁有計算器之學生的比率逐年增高。

1977 年對 22,000 位 Shawnee Mission (Kansas) 公立學校學生所作的調查顯示有 $\frac{1}{3}$ 的學生擁有計算器， $\frac{3}{4}$ 的使用過計算器。

1977 年冬，I.R. Weiss 對全國隨機取樣的 1177 所學校的調查顯示。

	年級			
	K-3	4-6	7-9	10-12
有計算器的學校	28 %	36 %	49 %	77 %
科學課程教師使用計算器者	2 %	12 %	10 %	36 %
數學課程教師使用計算器者	6 %	14 %	30 %	48 %
老師指出不需計算器者	77 %	44 %	42 %	33 %

1977 年至 1978 年 The Second National Assessment of Educational Progress in Mathematics 收集的資料顯示：9 歲 (國小六年級) 的學生有 75 %，13 歲 (國中三年級) 的學生有 80 %，17 歲 (高中三年級) 的學生有 85 % 曾使用過計算器。

- 計算器在美國境內廣為使用，市場調查顯示 1978 年至 1979 年底，曾賣掉八千萬台計算器。
- 大專學校已毫無問題接受計算器，高級中學之接受率亦很高，初級中學之接受率略低，小學之接受率更低些。造成這種現象的主要因為：

許多家長與教師認為在使用計算器之前，學童應先熟練數學的基本知識與計算。

- 教師對計算器使用的立場已慢慢改變。有些學區已將能使用計算器列入畢業生應具備的起碼技能。NCTM 亦鼓勵在課堂上使用計算器作為輔助計算的工具與教具。教師主要利用計算器

於

- (1)檢查紙、筆計算的結果
 - (2)作引起動機之遊戲
 - (3)輔助數值之計算
 - (4)發展數學概念
 - (5)補救教學與問題之求解 (problem solving)
- 1975年至1979年底進行了一百多項有關計算器之效用的研究工作，為本世紀美國地區有關數學教育研究之最熱門的題材。
 - *許多這類研究都指出：計算器之使用對學生之數學學習成就無害。
 - *有些研究指出：學生使用計算器有助於學童學習基本數學知識、計算技能與概念。
 - *有些研究是有關如何應用計算器於問題之求解 (problem solving)。
 - *有些為發展配合計算器使用教材 (有些學區與地方教學機構)
 - 教師在職訓練常用workshops的方式進行。
 - 有待進一步研究的重點有：
 - (1)發展配合計算器之使用的教材、課程與作業簿等
 - (2)評估計算器對於學習成就與學習態度的影響
 - (3)如何應用計算器於現行教材之教學
 - (4)如何使用計算器去發展計算技巧與數學概念
 - (5)計算器與問題之求解
 - (6)考試時使用計算器之問題
 - (7)教師之職前與在職訓練之有關問題

(二)西德

摘自Hartwig Meissner (Pädagogische Hochschule Westfalen-Lippe, Abteilung Münster) 之報告

- 幾乎每位成年人都有一部，售價最便宜的約合8元美金。
- 1至6(7)年級，除作實驗之用外，不使用計算器或其他計算工具。教師與家長通常都將計

算器視為計算工具，因此反對在發展計算技巧時(與之前)使用計算器。全國11個邦的教育部亦持同樣的看法。

- 據估計7(8)至13年級的學生，約在1985年之前，可能每人都有一架計算器，且7年級以上的課程內的計算尺將完全為計算器所取代。
- 8至13年級使用計算器於：
 - (1)節省計算的時間
 - (2)解決更實際的數字問題
 - (3)強化數學概念
 - (4)介紹需要更多計算的新教材單元
 - (5)分析各類資料組
 - (6)探討數學的情境
 - (7)不用電腦而操作簡單電腦程式
 - (8)溫習數學結構的概念
- 只要考試之目標不在於計算，考試時准許用計算器。
- 學生(或家長)購買計算器大都是經由學校統一採購。
- 教師在職進修並非義務性的，主要由教師或教育工作者協會，或各邦教育部提供。
- 根據研究結果發現計算器有助於1至6(7)年級學生了解加法、乘法表、大小秩序、單調性(monotonicity)、直觀的極限概念、函數概念。
- 計算器似乎對於7至13年級低成就學生有所幫助(使用+，-，×，÷與%等鍵)。

(三)日本

摘自島田茂 (Faculty of Education, Yokohama National University) 之報告

- 日本文部省鼓勵使用計算器於數學與科學課程之教學，重視這類課程之研究計劃，並資助學校購置計算器的設備。
- 國中與國小的研究課程 (Courses of Study)

裏都鼓勵使用計算器作為輔助數值計算的工具（但僅在一般備註欄裏提及，而不專門闢一單元介紹計算器）。

- 目前高中的研究課程之數學ⅡA以及重訂之數學Ⅱ（1982年使用）皆有一單元專門介紹計算器與電腦（兩者皆為供將來非主修科學之學生修習用的），並同時在一般備註欄內鼓勵使用計算器作為輔助計算之工具。
- 1970年起文部有津貼一半經費補助學校購置計算器之設備（作為充實數學與科學教育設備之十年計劃之一部份），其標準為：

學校及計算器之型式	每單位之單價	每所中等大小學校之數量（單位）
小學 （具+，-，×，÷鍵者）	¥ 10,000	6
國中 （具記憶與開方鍵者）	¥ 35,000	10
高中 （Ⅰ.可作程式並能印表者）	A ¥320,000 B ¥235,000	7
（Ⅱ.電腦或有許多鍵者）	C ¥1,300,000	1

- 教師在職訓練：由地方教育機構或其他單位之訓練中心提供，為期一週左右（不單是使用與教導計算器）。
- 大部份小學教師不贊成在課堂上使用計算器教學，主要原因有二：
 - (1)認為小學階段應重數學基本知識與計算技能之灌輸與培養
 - (2)心理上恐懼新的轉變
- 大部份中學教師較著重理論，特別是有關代數與幾何的單元教材，喜好採用理論推演方式教學，因此除少部份較重視理論與實際配合的教師外，都不歡迎使用計算器於教學。
- 高中階段深受大學入學考試之影響，而大學入學考試之試題大多是理論性的，且通常都不許

使用計算器，因此著重準備入學考試之教師都不喜用計算器教學。

- 由日本數學教育協會所發行的季刊與年會報告中可發現：

*在小學5、6年級數學課使用計算器教學之實驗，報告中提到之優點有：

- (1)可使學生避免受複雜數字計算所困擾，而將注意力集中於問題有關之數學關係與原理上。
- (2)使學生能面對更有意義之情境（特別是估計結果為根本者）。
- (3)學生因使用科學儀器，而感到有趣。

因此值得作更進一步的研究。

*高中階段使用計算器作為計算工具，教導有關函數圖形、方程式之數值解、統計等單元教材，且學生反應良好。

- 計算器的售價已急速下降，學生大多可用自己零用錢買一架，小學階段應如何對付此一情勢，是個急待解決的問題。

〈參〉探討與建議

現在讓我們來探討幾個有關袖珍計算器與數學教學的主要問題。

(一)袖珍計算器之使用，是否有礙於數學基本概念的學習與基本計算能力的培養？

由以上的報告我們知道美國、西德與日本等國的教師、學生家長與社會大眾大都非常擔心這種可能性。雖然有不少研究報告均指出使用計算器並不會對學生數學成就有害，有些教育工作者甚至認為計算器能幫助學童發展與學習數學的技能與概念。但這與教師之數學素養，有無配合計算器之使用的教材；教材教法；授課時間；學生課業負擔；學習成就評量；甚至社會背景等都有密切的關係。（見 Reys, Robert E. 1977-78

NAEP Hand Calculator Assessment, working paper, 1979; 或 Graeber, Rim and Unks., *A Survey of Classroom Practices in Mathematics: Reports of First, Third, Fifth and Seventh Grade Teachers in Delaware, New Jersey and Pennsylvania*. Philadelphia: Research for Better School, Inc., 1977)

由於茲事體大，許多關心教育的人士都認為有必要 (1)對如何使用計算器幫助發展數學技能與概念作進一步的實驗研究 (2)發展配合計算器之使用的教材 (3)繼續評估計算器對於學生學習成就與學習態度的影響。

記得國內有許多國中校長，數學教師曾經向筆者表示過：目前國內有不少國中學生的基本數學計算能力很差（有的甚至連九九乘法表都不能記清楚）；師大數學系邱日盛教授亦曾對台北市幾所國中進行抽樣測試，其成績亦不甚理想。因此筆者認為對於計算器是否有礙於數學基本概念之學習與基本計算能力之培養這個問題，在國內亦有必要加以實驗研究，冒然過早或不恰當地引進計算器，可能會加速惡化基本數學計算能力低落之趨勢。

(二)國內應該在何時引進計算器？如何引入？

“在不妨礙基本數學概念的學習與基本計算能力的培養之大前提下，儘早引進計算器”這個原則似乎大家都可接受。但那些是基本的數學概念？那些是基本的計算能力？這些基本數學概念應該了解到什麼程度？這些基本計算技能它應該熟練到什麼程度？則大家的看法並不一定一樣。

從以上的報告中，我們知道大專階段接受計算器是毫無問題的，高中階段大致上也沒什麼問題（特別是將計算器作為數值計算工具，用於基礎敘述統計，方程式之求解（數值法），線性規劃（單體法），函數圖形等單元，學生反應良好

）。國中、國小階段反對引進計算器者較多，且愈低年級反對愈激烈。西德與日本目前在小學階段，除作實驗研究外，根本不許使用計算器或其他計算工具於教學。其原因主要還是“擔心計算器之使用，有礙於基本數學概念的學習與基本計算能力的培養”。

比較西德、日本與我國國小、國中之數學教材，我們可以發現我國國小絕大部份之數學教材與一小部份的國中數學教材與它們國小數學教材極為相近，筆者也認為我國小數學教材與部份國中數學教材應屬於基本數學概念之範疇，因此筆者覺得在尚未實驗證明引進計算器對我國國小學童學習數學無害（甚或有益）之前，最好能避免在國小階段引進計算器，並設法防止學生不正當地使用計算器（特別是作習題與考試時）。

至於國中階段是否要引入計算器？如何引入？亦有必要作實驗研究並聽取各方對這個問題的看法。筆者認為國中階段的數學教育應具有試探功能與準備功能。即為學生提供各方面的基礎數學，使學生有機會試探自己的興趣和考驗自己的能力，並協助學生獲得將來從事職業時最有用的數學知識和技能。參與這次全國國民教育會議之人士亦建議：「國中課程設計應自第二學年發揮試探功能，使學生在教師指導下，各依其能力、性向、興趣及需要，選習不同之科目」；「……英文、數學等課本編成深淺不同教材，配合學生程度因材施教，貫徹正常教學，……」。國中學生的心智發展已漸趨成熟，個別差異已相當顯著，而且國中畢業後，有的不再升學，有的將進入普通高中、職校或五年制專科學校繼續求學，我們目前僅編了唯一的一套數學教材，所有國中學生都用這套教材。這是否適當，實有檢討改進的必要！

筆者常想若是能夠為那些國中畢業後不再升學的學生，編製一些（配合計算器之使用的）更

實用的教材，也能為那些打算進入工業或非工業的職校（包括五專制專科學校）的國中生分別提供配合計算器之使用的適切數學教材，那該有多好呢？同時由於在國中階段引進計算器尚有下列的幾點好處：

- (1)有助於改進教材教法——使用計算器有助於引起學習動機，發現教學法與啟發式教學法之實施及問題求解之策略（problem solving strategy）之運用。（見美國、西德與日本之報告）。
- (2)有助於引進新的數學教材單元（如更實用且需要較多計算之教材）。
- (3)有助於發展適合資賦較差（如目前國中益智班）的學生的教材與教法——忽略這些學生，似乎違反了國民義務教育的宗旨，也違反了「人性」，更會助長目前日趨嚴重之青少年問題。
- (4)有助於資賦優異學生探究、歸納、發現與創新。
- (5)配合國中自然科學的教學，作好橫的連繫。因此對於將來有志進入普通高中繼續求學的學生，亦不妨考慮於適當時機引進計算器。

(三)我們會遭遇到些什麼問題？如何來應付這些問題？

由以上的討論，我們知道最待解決的問題有：

- (1)計算器之使用，對我國國小學童學習基本數學概念與培養基本計算能力有害呢？還是有益呢？
 - (2)國中階段是否可以引進計算器？如何引入？
 - (3)發展配合使用計算器之數學教材與教法（包括適合資賦較差學生使用之教材與教法與資賦優異學生之補充教材、發展教材等）。
- 這些問題都有待於專案實驗研究。我教育主管當局及行政院國家科學委員會宜早日負起

規劃推動此項實驗研究計劃之責任，以與目前正進行之國小、國中、高中之數學與自然科學課程之實驗改進計劃相配合。

以下幾個問題最好也能儘早作妥善的安排：

- (4)寬籌經費，補助國中、高中、大專購買計算器之設備——可考慮由政府統一採購再分發至各校。
- (5)教師職前訓練——師大、高雄師院、彰化教育學院似乎應將介紹有關電腦、微電腦與計算器之基本概念與使用之課程列為必修課。（師範專科學校似乎也應如此）。教材教法課程似乎亦應配合改進。
- (6)教師在職訓練——比照職前訓練之方針與方式，作適當安排。
- (7)考試時是否准用計算器之問題。
- (8)防止學生不當使用計算器之問題。

〈肆〉參考資料與文獻

- 1 Beardslee, Edward C., Teaching Computational Skill with a Calculator. In *Developing Computational Skill* (Marilyn N. Suydam, editor). 1978 NCTM Yearbook. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics, 1978.
- 2 Bell, A.; Burkhardt, H.; McIntosh, A.; and Moore, G., *A Calculator Experiment in A Primary School*. Nottingham: Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham, 1978.
- 3 Bell, Max. Calculators in Secondary School Mathematics, *Mathematics Teacher* 71: 405-410; May 1978.
- 4 Billings, Karen and Moursund, David. *Problem Solving with Calculators*. Salem, Oregon: The Math Learning Cen-

- ter, University of Oregon, 1978. (See also Calculators/Computers 2 : 17-32 ; September/October 1978. 2 : 73-94 ; November/December 1978).
- 5 Durham Education Committee. *The Use of Electronic Calculators in Secondary Schools*. Darlington teachers' Centre, 1976.
- 6 Dubische, Roy and Hood, Vernon R. *Basic Mathematics with Hand-held Calculator : A Work-Text*. Menlo Park, California : Benjamin/Cummings Publishing Company, 1979.
- 7 Hartman, Arlene. *The Calculator Game Book for Kids of All Ages*. New York : New American Library, Inc., 1977.
- 8 Henry, Loren L. An Invaluable Aid to Understanding Mathematics : The Hand-Held Calculator. *School Science and Mathematics*. 77 : 585-591 ; November 1977.
- 9 Hiatt, Art. A Geometry Problem for Hand-Held Calculators or Computers : *Calculators/Computers* 1 : 37-38 ; May 1977.
- 10 Hiatt, Arthur A. Basic Skills : What Are They ? *Mathematics Teacher* 72 : 141-144 ; February 1979.
- 11 Immerzeel, George. *Ideas and Activities for Using Calculators in the Classroom*. Dansville, New York : Instructor Publications, Inc., 1976.
- 12 Immerzeel, George and Ockenga, Earl. *Calculator Activities-Books 1 and 2*. Palo Alto : Creative Publications, 1978.
- 13 Ladd, Norman E. *Working with the Calculator in Beginning Algebra*. Skokie, Illinois : National Textbook Co., 1976.
- 14 Morris, Janet Parker. Problem Solving with Calculators. *Arithmetic Teachers* 25 : 24-26 ; April 1978.
- 15 (NACOME). *Overview and Analysis of School Mathematics Grades K-12*. Washington. Conference Board of the Mathematical Sciences, National Advisory Committee on Mathematical Education., November 1975. ERIC : ED 115 512
- 16 (NCTM.) Position Statement on Calculators in the Classroom. Reston; Virginia : National Council of Teachers of Mathematics, September 1978.
- 17 Szetela, Walter, Hand-Held Calculator and the learning of Trigonometric Ratios. *Journal for Research in Mathematics Education* 10 ; 111-118 ; March 1979.
- 18 Williams, S. Irene and Jones, Chancey O. *A Survey of the Use of Hand-Held Calculator in Advanced Placement Calculus Courses*. Princeton, New Jersey : Educational Testing Service, 1979.

〈伍〉後記

微電腦與電腦在最近的將來亦有普及的趨勢，對教育方面將帶來的衝擊必定很大，早作研究與準備也是必要的。 □