

高級中學數學課程實驗教材

●●● 數學歸納法的教學心得 ●●●

中正國防幹部預備學校 呂發全

數學上導出公式，證明定理，常常靠靈感、猜測、技巧而獲得，有其極限，無法隨心所欲。數學上引出一種特殊的驗證法，那就是數學歸納法。數學歸納法在數學上是很常用的方法，有很多命題都可以藉由它來加以證明，它也可以用來求某些級數的和。

1. 熟悉數學歸納法：

求 $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \cdots + \frac{1}{4n^2 - 1}$ 之和。

(1) 歸納階段

設 $S_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \cdots + \frac{1}{4n^2 - 1}$

觀察 $n = 1$ 時 $S_1 = \frac{1}{3}$

$n = 2$ 時 $S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{2}{5}$

$n = 3$ 時 $S_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} = \frac{3}{7}$

.....

發現其部份和的數列依次為：

$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \cdots$

$\frac{1}{2 \cdot 1 + 1}, \frac{2}{2 \cdot 2 + 1}, \frac{3}{2 \cdot 3 + 1}, \cdots$

推測 $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \cdots + \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{n}{2n + 1}$

此種推測真確嗎？亦即是一般地真確嗎？此公式在其所由提示之特例 $n = 1, 2, 3$ 確實為真， $n = 4$ 時也為真嗎？推測導引我們預言

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} = \frac{4}{2 \cdot 4 + 1}$$

而事實上，兩邊結果均為 $\frac{4}{9}$ 。

當然，我們能夠繼續試 $n = 5$ 也必成立，驗算之，但是這種誘惑並不強烈，我們傾向於相信這個公式在次例也成立，故此種印證添增給我們的信念有限——小到不值得去計算它，我們如何才能更為有效的試驗此推測呢？

如果推測完全為真，則應與實例之變化無關係。我們可以試驗從 k 到 $k + 1$ 的轉變，若此推測是一般為真，則對 k 及 $k + 1$ 均必為真。

試驗此推測：

$n = k$ 時

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{k}{2k + 1} \quad (1)$$

$n = k + 1$ 時

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{1}{4k^2 - 1} + \frac{1}{4(k+1)^2 - 1} \\ = \frac{k+1}{2k+3} \end{aligned} \quad (2)$$

(2) - (1) 得

$$\frac{1}{4(k+1)^2-1} = \frac{k+1}{2k+3} - \frac{k}{2k+1}$$

此推測之結論為真嗎？

$$\begin{aligned} & \frac{k+1}{(2k+3)} - \frac{k}{2k+1} \\ &= \frac{2k^2+3k+1-2k^2-3k}{(2k+3)(2k+1)} \\ &= \frac{1}{4k^2+8k+4-1} \\ &= \frac{1}{(2k+2)^2-1} \\ &= \frac{1}{4(k+1)^2-1} \end{aligned}$$

受檢驗之結論為真，此推測已通過嚴格的試驗。

(2)證明階段

利用上式之證明

假設一般化為真

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{1}{4k^2-1} = \frac{k}{2k+1} \text{ 為真 } (3)$$

$$\text{則 } \frac{1}{4(k+1)^2-1} = \frac{k+1}{2k+3} - \frac{k}{2k+1} \quad (4)$$

也為真

$$\begin{aligned} (3)+(4) \quad & \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{1}{4k^2-1} \\ & + \frac{1}{4(k+1)^2-1} = \frac{k+1}{2k+3} \end{aligned}$$

必然為真

如果對某自然數 n 我們的推測為真，則其次自然數 $n+1$ 亦必為真。

但我們知道對 $n=1, 2, 3, 4$ ，推測為真，如 $n=4$ 為真時，則 $n=5$ 必為真，如 $n=5$ 為真時，則 $n=6$ 必為真，依此類推，則對所有自然數 n 均為真，證明了一般化的正確。

(3)數學歸納法的簡化

(i) 當 $n=1$ 時，檢驗原式成立。

(ii) 假設 $n=k$ 時，原式成立，推得 $n=k+1$ 時原式亦成立。則 $\forall n \in \mathbb{N}$ ，原式恒成立。

如果我們已經花了些時間在解答的推理上面，既已想到推測，則應該可以嘗試數學歸納法是否適於證明它，於是，沒有任何試驗，我們可以直接使用數學歸納法證明如下：

(i) 當 $n=1$ 時 $\frac{1}{3} = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1}$ 原式成立

(ii) 假設 $n=k$ 時

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{1}{4k^2-1} = \frac{k}{2k+1} \text{ 成立}$$

$$\begin{aligned} \text{則 } & \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{1}{4k^2-1} + \frac{1}{4(k+1)^2-1} \\ &= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2n+2)^2-1} \\ &= \frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{k+1}{2k+3} \end{aligned}$$

當 $n=k+1$ ，原式亦成立。

由數學歸納法知

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{1}{4n^2-1} = \frac{n}{2n+1}$$

(4)利用部份和求法

$$\begin{aligned} \frac{1}{4n^2-1} &= \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{則 } S_n &= \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \cdots + \frac{1}{4n^2 - 1} \\
 &= \frac{1}{4-1} + \frac{1}{16-1} + \frac{1}{36-1} + \cdots \\
 &\quad + \frac{1}{4n^2 - 1} \\
 &= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots \\
 &\quad + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2n+1} \right] = \frac{n}{2n+1}
 \end{aligned}$$

適才發生的情形並非不尋常，由數學歸納法所證明之定理常比用其他方法證明要簡短很多，由數學歸納法對證明所作的檢驗也比較簡短。

2 從 n 到 $n+1$ 是數學歸納法的基礎：

數學歸納法用來確定數學定理之為真，最主要的觀念是，繼續不斷地證明一個由特殊情況 $P_1, P_2, \dots$ ，所構成的數列，以確定一個具有一般性的定理 P_n ，就 n 的一切值而言為真。能夠做到這件事是基於兩點：(i) 已知第一個陳述 P_1 為真。(ii) 有一個具有一般性的方法，以顯示出，如果任何陳述 P_k 為真，那麼下一個陳述 P_{k+1} 也將為真。這兩點是確定 $S_1, S_2, S_3, \dots$ 等等一切陳述均為真的充分條件，這是一個邏輯上的原則，它不僅是數學的基礎，而且也是亞里斯多德邏輯中的古典規則。我們將其敘述如下：

讓我們假定，我們希望確定一個包含數學命

題 $P_1, P_2, P_3, \dots$

的整個無窮數列為真，而這些數學命題構成一個具有一般性的命題 P_n 。假定 (i) 已知第一個命題 P_1 為真，(ii) 根據某種數學上的論證，我們可以顯示出，如果 k 是任何自然數，並且如果斷言 P_k 已知為真，那麼可以推定斷言 P_{k+1} 為真。那麼該數列中的一切命題必均為真，而 P_n 就被證明了。

我們將毫不猶豫地採用它來作為數學推理的基本原則；恰如我們採用普通邏輯中的簡單規則來作為數學推理的基本原則一樣。因為，從一個已知斷言 (i) P_1 為真開始，反復運用斷言 (ii) 就可以繼續不斷地確定 $P_2, P_3, \dots$ 為真，這樣下去直到我們確定 P_n 為真，所以我們可以確定所有的陳述 P_k 為真。可見數學歸納法是基於一項事實，此事實即，在任何自然數 k 的後面，其次一個自然數是 $k+1$ ，並且從整數 1 開始，採取有限多個這樣的步驟，就可到達任何我們所希望得到的自然數 n 。

3 必須學習證明，但也該學習猜測

數學歸納法另一有趣的問題是觀察、類推與猜測。一個定理的證明，是在於應用某些簡單的邏輯規則，故證明並不是數學中具有創造性的因素，具有創造性的因素是在乎對將予考驗之諸可能性加以選擇。觀察類推與猜測的起源問題，在其所屬範圍中，根本沒有一般性的規則可循，觀察、類推，以及具有推斷能力的直覺，在數學中都扮演一角。今日所知的數學之許多性質，大部份均係由觀察所發現，而且在其真實性被嚴格的證明確定之前，許久便早已發現了。雖然有許多性質我們都非常熟悉，但迄今尚不能證明，唯有靠觀察才能獲得這些知識。觀察能引導我們探求新的性質而致力於其證明。觀察在純粹數學中，無疑的佔有很重要的地位。而一般的看法以為觀察僅限於對感官發生作用之物理世界為對象。因

爲我們認爲數學僅屬於純粹理智的範疇，故鮮能瞭解何以在研究數學時，觀察及類似之實驗得以派上用場。事實上，數學與證明邏輯（demonstrative, logic, 數學的一支）之外的所有知識都是由推測（conjectures）組成的。當然包括許多推測，有高度可信可重視的推測、如物理科學上的若干定律是，有既不可信又不值得重視的推測，這樣的推測往往可以見之於報章雜誌令人憤慨。在這兩種推測之間，尚有各種各樣的推測，預感及猜測。所以我們在學習數學中必須學習證明，但也該學習觀察，類推及猜測。

4 數學歸納法與歸納法究竟有無關係呢？

數學歸納法與自然科學中的逼真推理（Plausible reasoning）大不相同。非證明的推理通常使用的歸納法（或稱經驗歸納法）只產生逼真。但數學上的知識是經由證明推理（demonstrative reasoning），但假設的可靠性則來自逼真推理。數學上的證明係證明推理，但物理學家的歸納證據（inductive evidence），法官的情況證據（circumstantial evidence）歷史學家引用典籍的證據，以及經濟學家的統計證據，皆屬逼真推理。此二種推理之間差別甚鉅，證明推理是安全的，無庸爭議的，也是終結的，但逼真推理則是有冒險的，有爭議的也是暫時的。一個具有一般性的定律，雖然在任何有限多個情況中得到確證，無論這些情況是如何多，均不能視爲對這個定律已就嚴格數學的意義提供了證明，即使當時尚不知道有任何例外的情況。這樣的一個定律，仍僅能視爲一個非常合理的假設，它將受到未來經驗結果的修正。在數學中，一個定律或一個定理，僅當我們能顯示出來，它是某些已被視爲有效的假定在邏輯上的必然結果時，它才算是已被證明了。數學上有很多陳述，雖然它們到現在爲止所曾探究過的所有特殊情況中均驗證爲真，但仍不能算是已被證明在一般的情況下爲

真。當我們觀察到某一個定理在若干例子中爲真時，我們可以猜想它在一般情況下亦爲真；然後我們應該試圖用數學歸納法證明它。如果我們的嘗試成功了，那麼定理已被證明爲真；如果失敗了，那麼該定理可真可假，或許在若干時日後爲其他方法證明爲真，或證明爲假。當然我們要再一次的強調，證明推理雖然深入各門科學如數學然。但其本身（同數學本身一樣）不能產生任何關於自然界的重要新知識。關於世界的任何新知識的獲得都少不了逼真推理，在日常生活中，注重的只是這種推理而已。證明推理標準很嚴格，這些標準由證明推理之原理—邏輯學加以編彙及闡明。逼真推理之標準則較鬆弛，沒有一種講逼真推理的理論可以與證明推理的清楚相比，或像邏輯學那樣受到一致的承認。

5 對數學歸納法的進一步討論

數學歸納法可以稍予一般化而寫成：“如果已知一數列 $P_r, P_{r+1}, P_{r+2}, \dots$ ，在這裏 r 是某一自然數，並且如果

(i) 已知 P_r 爲真

(ii) 就所有 $k \geq r$ 而言，由 P_k 爲真推得 P_{k+1} 爲真，那麼一切 $P_r, P_{r+1}, P_{r+2}, \dots$ 均爲真；即 P_n 就一切 $n \geq r$ 而言爲真。”曾經用來確定普通數學歸納法爲真的推理方式，在這裏同樣可以應用，僅不過將數列 $1, 2, 3, \dots$ ，代以類似的數列 $r, r+1, r+2, \dots$ 而已。

與數學歸納法密切相關的是自然數的整序性：若 $M \subset N$ ， $M \neq \emptyset$ ，則 M 有最小元素。從邏輯的觀點來看，運用整序性來證明數學歸納法，就好像證明一個定理一樣。爲達到這個目的，必須考慮任何一數列 $P_1, P_2, P_3, \dots$ ，使

(i) 已知 P_1 爲真

(ii) 就任何自然數 k 而言，由 P_k 之爲真推得 P_{k+1} 之爲真。

假定 P_k 中任何一個被假設爲假，都是站不

住腳的。因為，如果 P_k 中有一個為假，那麼包含一切自然數 n 而言。 P_n 為假的集合 M 必不是空集合。根據整序性的性質， M 必包含一個最小元素 m ，由於 (i)， $m > 1$ 。故 P_m 必假，而 P_{m-1} 真。這就與 (ii) 相矛盾。

6. 數學歸納法的幾種形式：

(a) $\forall n \in N$ ，有一敘述 $P(n)$ ，若滿足下列二條件：

(i) $P(1)$ 為真

(ii) $P(k)$ 為真 $\Rightarrow P(k+1)$ 為真

則 $\forall n \in N$ ， $P(n)$ 恒為真。

(b) $\forall n \in N$ ， $n \geq k$ ，有一敘述 $P(n)$ ，若滿足下列二條件：

(i) $P(k)$ 為真

(ii) $P(m)$ 為真 $\Rightarrow P(m+1)$ 為真， $m \geq k$

則 $\forall n \geq k$ ， $P(n)$ 恒為真。

(c) $\forall n \in N$ ，有一敘述 $P(n)$ ，若能滿足下列二條件：

(i) $P(1), P(2)$ 為真

(ii) $P(k), P(k+1)$ 為真 $\Rightarrow P(k+2)$ 為真。

則 $\forall n \in N$ ， $P(n)$ 恒為真。

例 ① $\forall n \in N \Rightarrow \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}} \in N$

② $\forall n \in N \Rightarrow \frac{(3+\sqrt{13})^n - (3-\sqrt{13})^n}{2^n \sqrt{13}} \in N$

讀者自證。

(d) $\forall n \in N$ ，有一敘述 $P(n)$ ，若能滿足下列二條件：

(i) $P(1)$ 為真。

(ii) 設 $P(1), P(2), P(3), \dots, P(k)$ 為真 $\Rightarrow P(k+1)$ 為真

則 $\forall n \in N$ ， $P(n)$ 恒為真。 $\square$

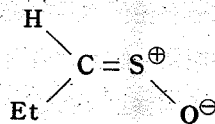
參考資料：

- (一) 基礎數學 (第一冊) 師大科教中心編印
- (二) 教學指引 (第一冊) "
- (三) 數學與逼真推理 田成俠譯
- (四) What is Mathematics ? 吳定遠譯

眼淚的化學

冠儒

切洋蔥時，常常會使人落淚，到底是洋蔥的成分中，那一種會引起流淚的呢？在美國化學協會的期刊 [Journal of American Chemical Society, Vol 101, Page 2200 (1979)] 中曾証明 (Z) — Propanethial S-oxide 即：



是使洋蔥帶來眼淚的原因。 $\square$