# 匈牙利魔術方塊遊戲的解法

國立台灣師範大學數學系　趙文敏

今年寒假以來，一種富有挑戰性及益智性的遊戲，從歐美傳到台灣，不僅使一般的青年學子為之着迷，甚至許多學者專家也都津津樂道。作者為了趕趕時髦，也想談談這種遊戲，同時提出一種公式化的解法。

這種遊戲本名是匈牙利魔術方塊遊戲（Hungarian magic cube puzzle），它是匈牙利的一位建築設計老師Rubik在西元1975年所設計的，因此，也稱為Rubik cube puzzle。這個魔術方塊是由二十六個小立方體很巧妙地砌合在一起，使得我們能夠把其中的任一層沿着適當的方向自由轉動。在這種魔術方塊的六個面上，分別漆上六種不同的顏色，當我們從商人手裡買到這個魔術方塊時，每個面上九個小格子的顏色都相同。這種遊戲的目的是：先將魔術方塊各層任意轉動，然後設法將它還原，也就是說，將它轉回原來那種每面同色的型態。

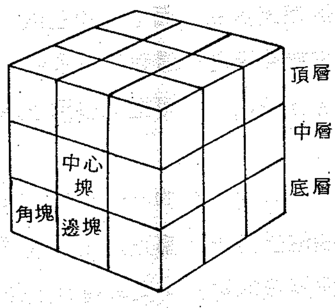


圖1

為了要說明下面那個公式化的解法，我們必須要約定一些術語，才能使敘述變得清楚明白：

將一魔術方塊放置桌上，則與桌面接觸的九個小立方體，我們稱為底層；與底層相連的八個小立方體稱為中層；其餘的九個小立方體稱為頂層。

構成魔術方塊的二十六個小立方體可分成三類：第一類稱為中心塊，這是指每個面中央位置的小立方體，此種中心塊共有六個。第二類稱為邊塊，這是指魔術方塊每個邊中點位置的小立方體，邊塊共有十二個。第三類稱為角塊，這是指魔術方塊每個頂點位置的小立方體，角塊共有八個。參看上圖1。

因為中心塊只有一面有顏色，所以，我們把中心塊做為角塊與邊塊的目的地，也就是說，當一個角塊的三個有色面上的三個顏色與它所在的三個面上中心塊的顏色相同時，我們稱這個角塊已在它的正確位置；當一個角塊已在它的正確位置，而且它的每個有色面都與所在面上中心塊的顏色相同，我們稱這個角塊已在它的正確位置且方向正確。關於邊塊，我們也使用相同的說法。

現在，我們開始說明如何把一個已經弄亂的魔術方塊還原；進行的程序分成四個階段：

第一階段是先排好一層，並把這一層作為底層；

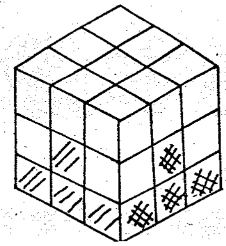
第二階段是排好中層的四個邊塊；

第三階段是排好頂層的四個邊塊；

第四階段是排好頂層的四個角塊。

第一階段：這部份應該是比較簡單的，也可以說，沒有一定的方法；原則上就是：當我們想旋轉某一層，則該層中不想被移動的小立方體應該先轉到與這一層平行的另一層上，當這一層旋轉完畢後，再把那些小立方體轉回來。

第一階段完成圖：
除了接觸桌面的那個面顏色都相同外，右圖中畫同式線紋的面顏色也都相同。



第二階段：當底層的九個小立方體都已在它們的正確位置且方向都正確後，我們開始進行中層的四個邊塊的排列。要做這件工作，只需要使用下面這種變換A以及它的逆變換$A^{-1}$：

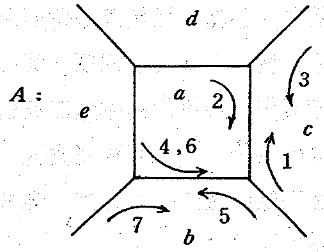


圖 2

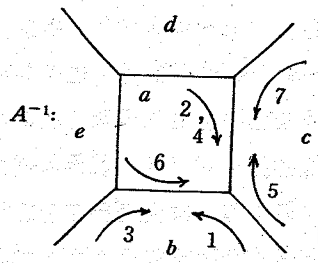
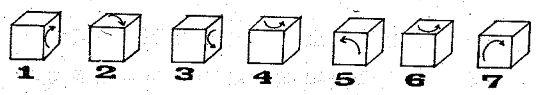


圖 3

事實上，A變換就是連續做下面這七個旋轉：




在上圖2及3中，$a$ 表示魔術方塊的頂層，而 $b$、$c$、$d$、$e$ 則表示頂層與底層間的四個面。而在圖2中，A變換共含七次旋轉，每次旋轉都只轉九十度，第一次是將c面沿箭頭的方向轉九十度，第二次是將 $a$ 面沿箭頭的方向轉九十度，其餘類推。如此，旋轉七次之後，底層的九個小方格仍然保持正確位置及正確方向，而且

(1) $a$ 面與 $e$ 面交線上的邊塊被移到 $b$ 面與 $c$ 面交線上的邊塊位置；同時，這個邊塊在 $a$ 面上的部份被移到 $c$ 面，$e$ 面上的部分被移到 $b$ 面。這個關係我們記爲A：$(a, e) \to (c, b)$。

(2)此外，我們還有A：$(c, b) \to (d, a)$。

(3)除了(1)與(2)所提的兩個邊塊被A所移動之外，還有另外五個頂層的小立體被移動，不過，這些對我們沒有作用。

$A^{-1}$ 這個變換，實際上是將A的七次旋轉，依相反次序及相反方向所得的，它的作用是

(1)底層的九個小立方體仍然保持正確位置及方向。

(2)$A^{-1}$：$(a, d) \to (b, c)$。

(3)其餘的變動不再考慮。

根據前面的說明，下面這兩個原則就可以完成第二階段的工作，當然，方法可能不只這一種：

(1)若正確位置在中層的某個小立方體在第一階段完成後落在中層，但位置不正確或方向不正確，那麼，將這個小立體移到圖2中的 $(b, c)$ 位置，作一次A變換，就可將它移到頂層。

(2)若正確位置在 $b$ 面與 $c$ 面交線上的邊塊，而在前面的變換後它落在頂層時，依照它在 $a$ 面上的顏色而分成兩種情形：

(a)若這個邊塊在 $a$ 面上的顏色與 $b$ 面的中心塊相同，則旋轉頂層把這個邊塊移到 $(a, d)$ 的位置，再作一次$A^{-1}$就可把它移到正確位置及正確方向。

(b)若這個邊塊在 $a$ 面上的顏色與 $c$ 面的中心塊相同，則旋轉頂層把這個邊塊移到 $(a, e)$ 的位置，再作一次A就可把它移到正確位置及正確方向。

第三階段：當底層與中層的十七個小立方體都已在它們的正確位置且方向都正確後，我們開始進行頂層的四個邊塊的排列。要做這件工作，只需要使用下面這種變換B以及它的對稱型變換$B^1$：

B這個變換的作用是這樣的：

(1)底層與中層的十七個小立方體仍保持正確的位置及方向；同時，$(a, b)$ 上的邊塊也保持不動。

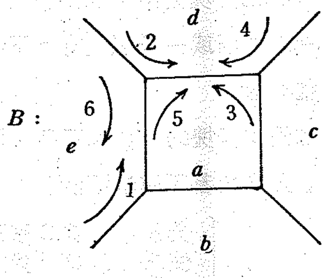



圖 4

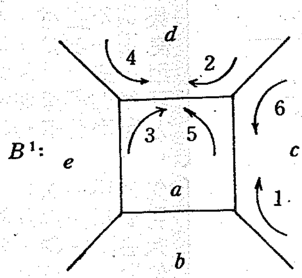



圖 5

(2) B：( $a$ , $e$ ) → ( $d$ , $a$ )，注意：頂面的顏色移走了。

(3) B：( $a$ , $d$ ) → ( $a$ , $c$ )，注意：頂面的顏色未動。

(4) B：( $a$ , $c$ ) → ( $e$ , $a$ )，注意：頂面的顏色移走了。

(5)頂層的四個角塊也被移動，不過，我們不必考慮。

根據這些說明，我們可以了解，B這個變換在頂層的四個邊塊間，一個保持不動，其餘三個作了一次順時針變換。

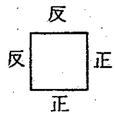
同樣地，$B^1$這個變換在頂層的四個邊塊間的作用是：一個保持不動，其餘三個作了一次逆時針變換。

根據前面的說明，下面的兩個原則可使我們完成第三階段的工作，當然，方法可能不只這一種：

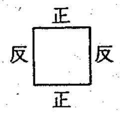
(1)旋轉頂層，使得頂層的一個邊塊落在它的正確位置；如果能使這個邊塊的方向也正確，則更佳。

(2)此時，在頂層的四個邊塊中，其位置正確者的個數必是一個或兩個或四個，我們就這三種情形來說明：

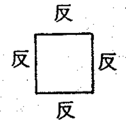
(a)若四個邊塊的位置都正確，則其方向可分成三類（方向全都正確者不計）：

(甲) 

使用一次B變換，再使用一次$B^1$變換，就可使頂層的每個邊塊都在正確位置且方向也都正確，第三階段完成。

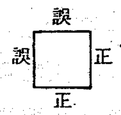
(乙) 

使用一次B變換，再作一次$B^1$變換，就可變成上面的(甲)情形。

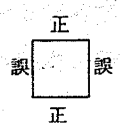
(丙) 

使用一次B變換，再作一次$B^1$變換，就可變成上面的(甲)情形。

(b)若只有兩個邊塊的位置正確，則根據位置的正確與否，可分成兩類：

(甲) 

將頂層順（或逆）時針旋轉九十度，則位置正確的邊塊只剩一個，然後使用下面(c)的方法。

(乙) 

使用一次B變換，就可變成上面的(甲)情形。

(c)若只有一個邊塊的位置正確，則將這個邊塊對準圖 4 中的 $b$ 面，然後，考慮下面兩種情形：

(甲)若頂層的另外三個邊塊只需一次順時針變換就都能到達它們的正確位置，則作一次B變換，就能變成前面的(a)情形。

(乙)若頂層的另外三個邊塊只需一次逆時針變換就都能到達它們的正確位置，則作一次$B^1$變換，就能變成前面的(a)情形。

第四階段：當底層，中層，及頂層的中心塊與邊塊等二十二個小立方體都在它們的正確位置且方向也都正確，則我們開始進行頂層的四個角塊的

排列。要作這件工作，只需要使用下面這兩種變換C與D：

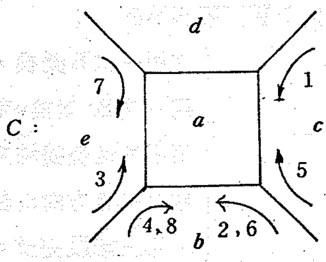


圖6

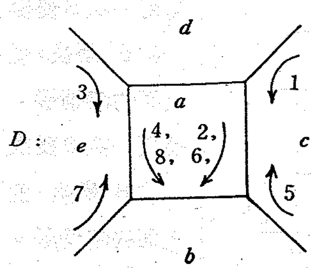


圖7

C與D這兩個變換有一個共同點，它們都只變動了二十六個小立方體中的三個，而使其餘的二十三個小立方體保持不動。事實上，

(1) $c$ 把 $a$ 面、$b$ 面、與 $e$ 面交點處的角塊移到 $a$ 面、$c$ 面、與 $d$ 面交點處的角塊位置，同時，這個角塊在 $a$ 面上的部分被移到 $d$ 面，$b$ 面上的部分移到 $c$ 面，$e$ 面上的部分移到 $a$ 面。這個關係我們記為C：$(a, b, e) \to (d, c, a)$。

(2) C：$(a, c, d) \to (b, c, a)$。

(3) C：$(a, b, c) \to (a, e, b)$。

另一方面，D這個變換的作用為

(1) D：$(a, b, e) \to (c, a, d)$。

(2) D：$(a, c, d) \to (b, c, a)$。

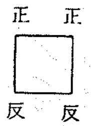
(3) D：$(a, b, c) \to (e, b, a)$。

根據前面的說明，下面的三個原則可使我們完成第四階段的工作，因此，完成了這個魔術方塊的遊戲：

首先注意到一件事：當第三階段完成以後，魔術方塊上除了頂層的四個角塊之外，其餘的小立方體都已到達它的正確位置且方向也都正確；這時，在頂層的四個角塊之中，位置正確者的個數只有三種可能：四個或一個或沒有。下面我們分別考慮這三種情形：

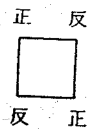
(1)若頂層的四個角塊的位置都正確，則其方向可分成四類（方向全都正確者不計）：

(a)



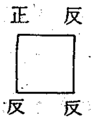

先使用一次C變換，再使用一次$D^{-1}$變換；如果還不正確，那麼，再使用一次C，接著再使用一次$D^{-1}$，如此，就可使四個角塊的位置與方向都正確，而遊戲完成。

(b)



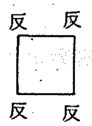

先使用一次$C^{-1}$變換，再使用一次D變換；如果還不正確，那麼，再使用一次$C^{-1}$，接著再使用一次D，如此，就可使四個角塊的位置與方向都正確，而遊戲完成。

(c)




按照(a)的方法作一次，就可變成(b)的情形。

(d)




按照(a)的方法作一次，就可變成(a)的情形。

(2)若只有一個角塊的位置正確，則將魔術方塊對準圖6的形式（即位置正確的角塊放在 $a$ 面、$d$ 面、與 $e$ 面的交點處），使用一次C，如果另外三個角塊的位置仍然都不正確，那麼，再使用一次C，則四個角塊的位置就都正確了。接著，依照(1)的情形去做。

(3)若四個角塊的位置都不正確，那麼，使用一次C，則必有一個（而且只有一個）角塊的位置是正確的，接著，依照(2)的情形去做。

以上所介紹的方法，可以完成把魔術方塊復原的工作，而且所需的旋轉次數大約不超過一百次。 □

註：本文已經收存在作者所編寫的寓數學於遊戲第一輯中（第29篇）。