繁分數與繁根數的圖解

國立台灣師範大學數學系　林福來

§1. $\sqrt{2}$ 的繁分數表示

十六世紀時，繁分數的應用是當時算術界的一項重大發展。R. Bombelli 在他寫的書“代數”（1572出版）中，第一次利用繁分數來估計開方數〔1〕。爲了估計 $\sqrt{2}$，Bombelli 作了如下的運算：

因爲 $\sqrt{2}$ 介於 1 與 2 之間，所以他令

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{y} \tag{1}$$

由(1)得

$$\frac{1}{y}=\sqrt{2}-1 \tag{2}$$

即
$$y=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$$
$$=2+(\sqrt{2}-1) \tag{3}$$

將(2)代入(3)得

$$y=2+\frac{1}{y} \tag{4}$$

將(1)式左邊的分母 y，以(4)式代入得

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{y}} \tag{5}$$

再將(5)式左邊的 y 以(4)式代入，並且重覆這步驟，得

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}} \tag{6}$$

(6)式就是 $\sqrt{2}$ 的繁分數表示，利用(6)式自然就能估計 $\sqrt{2}$ 了，並且誤差可以任意小。Bombelli 成功地利用繁分數來估計某些開方數。不過，他並沒有進一步考慮，如果給予一無限的繁分數，那麼此繁分數是否會收斂的問題。

§2. $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}=?$

如果沒有前一節的運算，我們就不可能一眼看出這繁分數會收斂到 $\sqrt{2}-1$。這時，通常我們的求法如下：

令
$$y=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}} \tag{7}$$

則

$$\frac{1}{y}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}=2+y \tag{8}$$

解(8)式得　$y=\sqrt{2}-1$

（由(7)知 $y>0$，故只取正根）

答案跟(6)式符合。

上述的解法有沒有漏洞呢？我們來檢查一下。當我們解(8)式時，我們得先認定 y 在本質上是一個未知的數，才能求解。而 y 是由(7)式所定義的。換句話說，我們必需先知道(7)式左邊的繁分數，確實是一個數，我們的求解才有意義。所以上面的解法，跟 Bombelli 一樣，都將繁分數是否收斂的問題忽略了。

以下我們將利用圖形來說明

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}$$

確是會收斂，並且將上面的解法，賦予幾何意義。

§3. $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}$ 的圖解

設函數 $f_1(x)=\dfrac{1}{2+x}$ 爲了方便起見，函數 f_1 的迭冪我們將以足碼表示，即

$$f_2(x)\equiv f_1(f_1(x))=\frac{1}{2+f_1(x)}$$

$$=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+x}}$$

$$f_3(x)\equiv f_1(f_2(x))=\frac{1}{2+f_2(x)}$$

$$=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+x}}}$$

$\vdots$

$$f_n(x)\equiv f_1(f_{n-1}(x))=\frac{1}{2+f_{n-1}(x)}$$

$$=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots+\cfrac{1}{2+x}}}}$$

$\vdots$

設 a 爲異於 -2 的任一實數，將 a 代入 $f_k(x)$，即得一數列

$$f_1(a),\ f_2(a),\ f_3(a),\cdots,\ f_n(a),\cdots$$

從 $y=f_1(x)$ 的圖形中，我們可以看出當 n 愈大，那麼點 $(f_{k-1}(a),\ f_k(a))$ 在 $y=f_1(x)$ 的圖形上會逼近 $y=f_1(x)$ 與 $y=x$ 的交點 P，P 在第一現象內。換句話說，數列 $\{f_n(a)\}$ 會收斂到 P 點的縱坐標（等於橫坐標）。

利用平移，可以很容易描出等軸雙曲線

$$y=f_1(x)=\frac{1}{x+2}$$

的圖形。

令　$x'=x+2$，$y'=y$

則　$y=\dfrac{1}{x+2}$　可寫成 $x'y'=1$

先在 $x'y'$ 平面上，描出等軸雙曲線 $x'y'=1$，再將 y' 軸右移兩單位，即得

$$y=\frac{1}{x+2}$$

在 xy 平面的圖形如下：

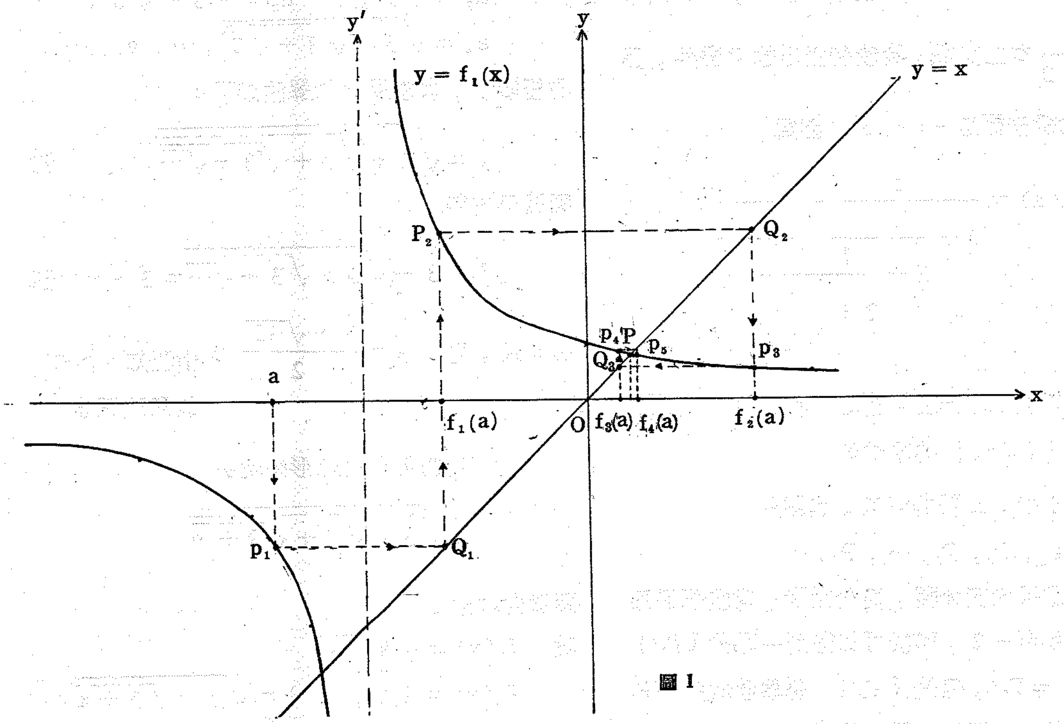

圖 1

圖 1 說明：

(1) 在 x 軸上任取不等於 -2 的一點 a

(2) 在 $y=f_1(x)$ 的圖形上標出 a 的對應點 $P_1(a, f_1(a))$

(3) 將 P_1 沿 x 軸方向平移到直線 $y=x$ 上，得 Q_1，則 Q_1 的縱坐標與 P_1 同，Q_1 又在 $y=x$ 線上，故 Q_1 坐標爲 $(f_1(a), f_1(a))$。

(4) 利用 Q_1 在 x 軸上找到點 $f_1(a)$。

(5) 在 $y=f_1(x)$ 的圖形上標出 $f_1(a)$ 的對應點 $P_2(f_1(a), f_2(a))$。

(6) 重覆(3)，(4)兩步驟，可得 $Q_2(f_2(a), f_2(a))$ 及 $P_3(f_2(a), f_3(a))$，如此繼續進行，在 $y=f_1(x)$ 的圖形上，就可得到一點列

$$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \cdots$$

其中 P_k 的坐標爲 $(f_{k-1}(a), f_k(a))$，換句話說，P_k 點的高度等於 $f_k(a)$。

從圖 1 中，我們發現 P_k 愈來愈靠近 P，且以 P 爲極限。而數列 $f_k(a)$ 是點列 P_k 的縱坐標所形成的，因此 $f_k(a)$ 會收斂到 P 點的縱坐標。

因爲 P 點是 $y=f_1(x)$ 的圖形與直線 $y=x$ 的交點，所以 P 點的坐標就是下列方程組的解。

$$\begin{cases} y = f_1(x) = \dfrac{1}{x+2} & (9) \\ y = x & (10) \end{cases}$$

將(9)式右邊的 x 以(10)式代入得

$$y = \frac{1}{y+2} \qquad (11)$$

上式的正數解就是 P 點的縱坐標，也就是 $\{f_k(a)\}$ 的收斂值。

比較(8)(11)兩式，我們發現它們其實是同義方程式。所以在 § 2 中，以代數方法求

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}$$

的值，在幾何上，就相當於求 $y=f_1(x)$ 的圖形

與直線 $y=x$ 的交點。在圖 1 中，$y=x$ 與 $y=\dfrac{1}{x+2}$ 有二交點，除我們標出的 P 點外，另一交點的縱坐標是 $-1-\sqrt{5}$ 因爲

$$f_n(a)=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots\cfrac{1}{2+a}}}}$$

只要 $a \neq -2$，都代表一正數，所以 $-1-\sqrt{5}$ 不可能是 $\{f_n(a)\}$ 的收斂值。

在圖 1 中，a 點的選取，與點列

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ \cdots,\ P_n,\ \cdots$$

收斂至 P 點這事實無關。換句話說，當我們另取一點 b，$b \neq -2$，同樣可以得到一點列 $\{P_n'\}$，雖然 $P_n \neq P_n'$，但是 $\{P_n'\}$ 仍然會收斂到 P 點。讀者請自行選取一點來試看看。其道理，我們在 § 4 中說明。

§4. 繁根數 $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots}}}$ 的圖解

跟繁分數有異曲同工之妙的還有繁根數。欲求

$$\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\cdots}}}=?$$

如果我們也先假設此繁根數有一收斂值，亦即數列 $a_1=\sqrt{3}$，$a_2=\sqrt{3+\sqrt{3}}$，

$$a_3=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}},\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

有極限 y，那麼通常的解法如下：

$$y=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots}}}} \tag{12}$$

兩邊平方得

$$y^2=3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots}}}=3+y \tag{13}$$

解(13)式，得 $y=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$（由(12)知 $y>0$，故只取正根）

現在我們再利用圖形來說明

$$\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\cdots}}}$$

確實會收斂。

設 $f_1(x)=\sqrt{3+x}$

$$f_2(x)=f_1(f_1(x))=\sqrt{3+\sqrt{3+x}}$$

$$f_3(x)=f_1(f_2(x))=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+x}}}$$

$\cdots$

$$f_n(x)=f_1(f_{n-1}(x))=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{3+x}}}}$$

$\cdots$

作 $y=f_1(x)=\sqrt{3+x}$ 與 $y=x$ 的圖形如下（圖 2）。

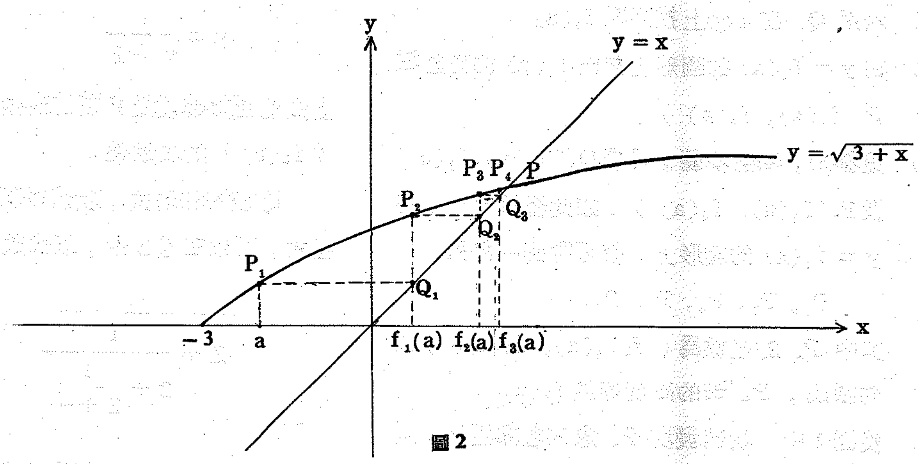

圖 2

在圖 2 中，我們先在 x 軸上任取一點 a ，a > -3 ，($\sqrt{3+x} \in R$ 的解)，仿照圖 1 的作法，得到拋物線 $y=\sqrt{3+x}$ 上的一點列

$P_1, P_2, P_3, P_4, \cdots$

其中 $P_1, P_2, P_3, P_4, \cdots$ 的縱坐標，分別是

$$\sqrt{3+a},\quad \sqrt{3+\sqrt{3+a}},$$

$$\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+a}}},$$

$$\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+a}}}},\cdots$$

從圖 2 中，我們又發現 $\{P_n\}$ 愈來愈逼近 P 點，P 爲直線 $y=x$ 與 $y=\sqrt{3+x}$ 的圖形的交點，因此 P_n 的縱坐標

$$\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{3+a}}}}$$

會收斂到 P 點的縱坐標。而 P 點的縱坐標，就是下列方程組

$$\begin{cases} y=\sqrt{3+x} & (14) \\ y=x & (15) \end{cases}$$

的解 (x,y) 中的 y 值。

將(15)代入(14)得

$$y=\sqrt{3+y} \qquad (16)$$

(16)式與(13)式又是同義。換句話說，解(13)式，就相當於求 $y=\sqrt{3+x}$ 的圖形與直線 $y=x$ 的交點。

同樣地，在圖 2 中，a 點的選取可以任意，只要 $a>-3$ ，那麼所得的點列 $\{P_n\}$ 就會收斂至點 P 。例如取 $a=-2$ 與 $a'=100$，如果由 a 與 a′ 所得的點列分別是 $\{P_n\}$ 與 $\{P_n'\}$ ，那麼 $\{P_n\}$ 與 $\{P_n'\}$ 的縱坐標形成兩個數列如下：

$$f_1(-1)=\sqrt{3-1},\quad f_2(-1)=\sqrt{3+\sqrt{3-1}}$$

$$f_3(-1)=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3-1}}}$$

$$f_4(-1)=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3-1}}}},\cdots$$

$$f_1(100)=\sqrt{3+100}$$

$$f_2(100)=\sqrt{3+\sqrt{3+100}}$$

$$f_3(100)=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+100}}}$$

$$f_4(100)=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+100}}}}$$

$\cdots$

這兩個數列 $\{f_n(-1)\}$，$\{f_n(100)\}$ ，當 n 很小時，對應項 $f_n(-1)$，$f_n(100)$ 相差很大，例如 $f_1(-1)=\sqrt{2}$，$f_1(100)=\sqrt{103}$，差異極大。但是當 n 愈大，$|f_n(-1)-f_n(100)|$ 就愈小。只要 n 充分大，那麼 $|f_n(-1)-f_n(100)|$ 就可以任意小。這就是說，當 n 充分大時，$f_n(a)$ 的值不太受 a 值的影響。這也就是爲什麼在圖 2 中，a 的選取可以任意，不會影響點列 $\{P_n\}$ 收斂到 P 點的道理。圖 1 中的 a 可以任意選取，道理相同。

§5. 結語

本文利用圖形來說明較簡單的繁分數，形如

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cdots}}}$$

與繁根數 $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots}}}$ 的收斂性。事實上，我們知道每一個實數都可以表成繁分數，方法很簡單：設 r 爲任一實數，先將 r 的整數部分析出，即

$r=a_0+x_1$

其中 $a_0\in\mathbf{Z}$ 且 $0<x_1<1$

令 $\dfrac{1}{x_1}=a_1+x_2$

其中 $a_1\in\mathbf{Z}$ 且 $0<x_2<1$

再令 $\dfrac{1}{x_2}=a_2+x_3$

其中 $a_2\in\mathbf{Z}$ 且 $0<x_3<1$

$\cdots$

繼續將 $\frac{1}{x_n}$ 分成整數與介於0,1間的數，即

$$\frac{1}{x_n} = a_n + x_{n+1}$$

因此 $r = a_0 + x_1 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + x_2}$

$$= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + x_3}}$$

$$= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + x_4}}} = \cdots$$

$$= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cdots}}}}$$

這就是r的繁分數表示。

任意給予一繁分數，我們所介紹，以圖形觀察其收斂值的方法並不一定適用。我們只做了

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cdots}}}$$

與 $\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots}}}$

的情形。有興趣的讀者可以再試看看那一類型的繁分數或繁根數也可用圖形看出極限。

另外在§1中，Bombelli 化 $\sqrt{2}$ 成繁分數的方法，能夠推廣至一般的開方數嗎？讀者也可以試一些例子。 □

參考資料

〔1〕 Morris Kline, *Mathematical Thought from ancient to modern*. PP. 254. 凡異出版社