科學教育雙月刊　第 40 期　中華民國七十年(1981)

馬賽克圖案

國立台灣師範大學數學系　　趙文敏

許多磁磚、拼花地板、壁紙等上面的圖案，都是利用許多邊長相同的正多邊形配上不同的色彩與花紋所成的。在這些千變萬化的設計中，存在著一個基本的數學問題，那就是：什麼邊數的正多邊形才能用在這種圖案的設計上？

在趣味數學中，有關如何利用正多邊形來拼合成一個面的討論，稱爲馬賽克（Mosaics）。這個名稱目前也已被建材業者所採用，在街上的商店招牌中，不難看到「磁磚馬賽克」這些字眼。

假定在這些圖案設計中，要求頂點拼合在一起，那麼，在同一個頂點所拼合的正多邊形，數量上就有了限制。因爲正多邊形的內角都小於 180°，所以，不可能把兩個正多邊形在頂點處拼合而能構成一塊面，也就是說，在同一頂點處拼合的正多邊形至少要有三個。其次，內角最小的正多邊形是正三角形，其內角是 60°，因此，在同一頂點處拼合的正多邊形最多只能有六個。

下面我們分成三個、四個、五個、六個正多邊形的拼合情形來討論：

一、三個正多邊形的拼合

設有一個圖案上每個頂點是由一個正n_1邊形、一個正n_2邊形、一個正n_3邊形所拼合而成的，依正多邊形的內角公式，可得

$$\left(\frac{n_1-2}{n_1}+\frac{n_2-2}{n_2}+\frac{n_3-2}{n_3}\right)\times 180^\circ = 360^\circ$$

移項、化簡，可得

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{2}$$

假設 $n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3$，則知 $3 \leqslant n_1 \leqslant 6$。

(i)若 $n_1=3$，則

$$\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{6}$$

於是，$7 \leqslant n_2 \leqslant 12$。顯然地，當 $n_2=7$ 時，$n_3=42$；當 $n_2=8$ 時，$n_3=24$；當 $n_2=9$ 時，$n_3=18$；當 $n_2=10$ 時，$n_3=15$；當 $n_2=11$ 時；n_3 不是整數；當 $n_2=12$ 時，$n_3=12$。

因此，當 $n_1=3$ 時，(n_1,n_2,n_3)共有五組解，它們是(3,7,42)；(3,8,24)；(3,9,18)；(3,10,15)；以及(3,12,12)。

在這五組解中，前四組解的正多邊形只能在一個頂點處拼合，却無法推展成一個面，所以，對於圖案設計上，這四個解不能提供實際的用途。事實上，若一組解(3,n_2,n_3)能應用到圖案上，則 $n_2=n_3$。這一點只要考慮某個三角形三個頂點處的拼合情形就可以了。至於(3,12,12)這組解所拼合出來的圖形是下圖 1：

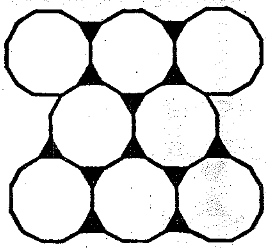

圖1

(ii) 若$n_1=4$，則

$$\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{4},$$

於是，$5\leqslant n_2\leqslant 8$。顯然地，當$n_2=5$時，$n_3=20$；當$n_2=6$時，$n_3=12$；當$n_2=7$時，$n_3$不是整數；當$n_2=8$時，$n_3=8$。

因此，當$n_1=4$時，(n_1,n_2,n_3)共有三組解，它們是(4,5,20)；(4,6,12)；以及(4,8,8)。

在這三組解中，第一組解的正多邊形只能在一個頂點處拼合，而無法推展成一個面，所以，

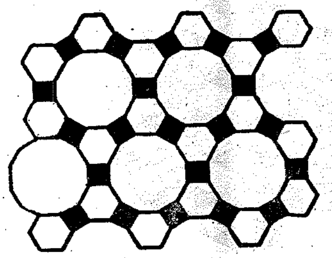

圖2

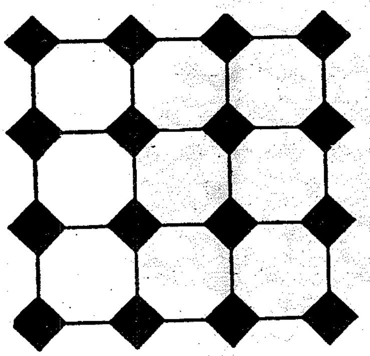

圖3

無法應用到圖案設計上。要了解這組解不能推展成一個面，只需要考慮一個五邊形五個頂點處的拼合情形就可以了。至於(4,6,12)與(4,8,8)這兩組解所拼合出來的圖形是上圖2及圖3：

(iii)若$n_1=5$，則

$$\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{3}{10},$$

於是，$5\leqslant n_2\leqslant 7$。顯然地，當$n_2=5$時，$n_3=10$；當$n_2=6$或7時，$n_3$都不是整數。

因此，當$n_1=5$時，(n_1,n_2,n_3)只有一組解(5,5,10)。這一組的正多邊形只能在一個頂點處拼合，而無法推展成一個面，所以，無法應用到圖案設計上。要了解這一點，只要考慮某個五邊形的五個頂點處的拼合情形就可以了。

(iv) 若$n_1=6$，則

$$\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{3}$$

於是，$n_2=n_3=6$，也就是說，當$n_1=6$時，(n_1,n_2,n_3)只有一組解(6,6,6)，而這組解所拼合出來的圖形是下面的圖4：

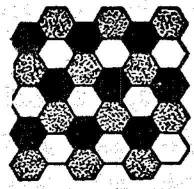

圖4

根據以上所得的結果，我們知道，利用三個正多邊形在一個頂點處拼合，可以得出四種不同的圖案。

二、四個正多邊形的拼合

設有一個圖案上每個頂點是由四個正多邊形所拼合而成，其邊數分別為n_1，n_2，n_3，n_4，依正多邊形的內角公式，可得

$$\left(\frac{n_1-2}{n_1}+\frac{n_2-2}{n_2}+\frac{n_3-2}{n_3}+\frac{n_4-2}{n_4}\right)\times 180^\circ$$
$$=360^\circ$$

移項、化簡，可得

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=1\ ,$$

假設 $n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3 \leqslant n_4$，則知 $3 \leqslant n_1 \leqslant 4$。

(i)若 $n_1=3$，則

$$\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=\frac{2}{3}$$

於是，$3 \leqslant n_2 \leqslant 4$，故 $n_2=3$ 或 4。設 $n_2=3$，則

$$\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=\frac{1}{3}$$

仿前面的解法，知 $n_3=4$，$n_4=12$；或 $n_3=6$，$n_4=6$。若 $n_2=4$，則

$$\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=\frac{5}{12}$$

可得 $n_3=4$，$n_4=6$。

因此，當 $n_1=3$ 時，(n_1,n_2,n_3,n_4) 共有三組解，它們是 (3,3,4,12)；(3,3,6,6)；以及 (3,4,4,6)。

在這三組解中，(3,3,4,12) 必須與其他解配合，才能推展成一個平面圖案，其中的一例是與 (3,12,12) 配合而成一圖形如下圖 5，另外兩例參看圖12與圖14：

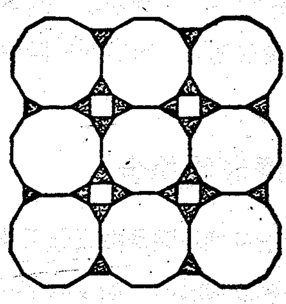

圖 5

(3,3,6,6) 這組解有兩種方法來配成圖案，就是下面的圖 6 與圖 7：

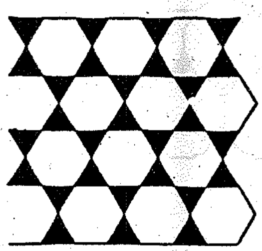

圖 6

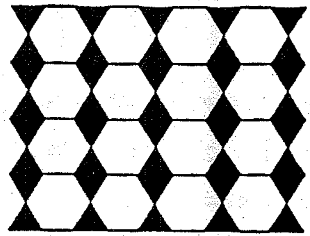

圖 7

(3,4,4,6) 這組解的變化較多，我們舉出兩個例子如下圖 8 與圖 9：

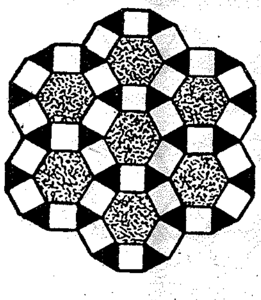

圖 8

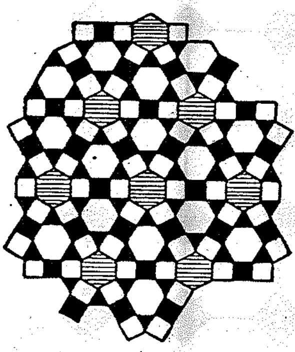

圖 9

(ii)若 $n_1=4$，則

$$\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=\frac{3}{4}$$

於是，$n_2=4$，因此，$n_3=n_4=4$。

因此，$n_1=4$時，（n_1,n_2,n_3,n_4）只有一組解（4,4,4,4）。這一組解所成的圖形為下圖10：

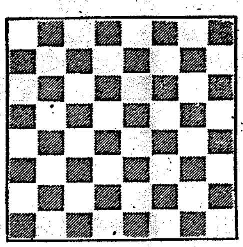

圖10

三、五個正多邊形的拼合

設有一個圖案上每個頂點是由五個正多邊形所拼合成的，其邊數分別為n_1，n_2，n_3，n_4，n_5，依正多邊形的內角公式，可得

$$\left(\frac{n_1-2}{n_1}+\frac{n_2-2}{n_2}+\frac{n_3-2}{n_3}+\frac{n_4-2}{n_4}+\frac{n_5-2}{n_5}\right)\times 180^\circ=360^\circ$$

移項、化簡，得

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}=\frac{3}{2}$$

假設$n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3 \leqslant n_4 \leqslant n_5$，則知$n_1=3$。於是

$$\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}=\frac{7}{6}$$

因此，$n_2=3$，$n_3=3$，而且

$$\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}=\frac{1}{2}$$

於是，$n_4=3$，$n_5=6$，或$n_4=4$，$n_5=4$。

因此，（n_1,n_2,n_3,n_4,n_5）共有兩組解（3,3,3,3,6）與（3,3,3,4,4）。在這兩組解中，（3,3,3,3,6）所成的圖形為下圖11：

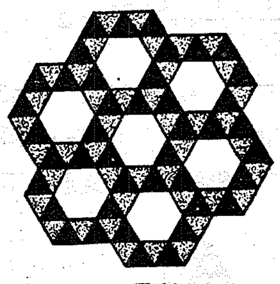

圖11

另一方面，如果我們把（3,4,4,6）的每個圖形（如圖8與圖9）中，把每個正六邊形都平分成六個正三角形，那麼，所得的圖形都是（3,3,3,4,4）的一個圖形。除此之外，將（3,3,3,4,4）與（3,3,4,12）兩組解配合，可得下面的圖12（參看本刊封面）

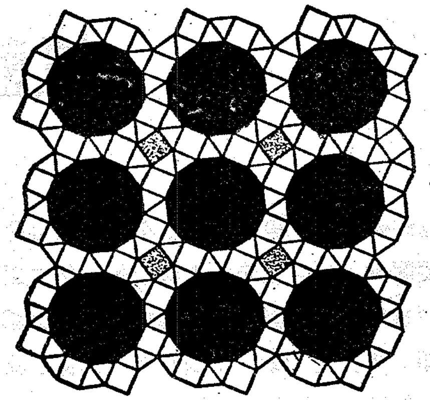

圖12

四、六個正多邊形的拼合

設有一個圖案上每個頂點是由六個正多邊形所拼合成的；其邊數分別為n_1，n_2，n_3，n_4，n_5，n_6，依正多邊形的內角公式，得

$$\left(\frac{n_1-2}{n_1}+\frac{n_2-2}{n_2}+\frac{n_3-2}{n_3}+\frac{n_4-2}{n_4}+\frac{n_5-2}{n_5}+\frac{n_6-2}{n_6}\right)\times 180^\circ=360^\circ$$

移項、化簡，得

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}=2$$

於是，$n_1=n_2=n_3=n_4=n_5=n_6=3$。換言之，（$n_1,n_2,n_3,n_4,n_5,n_6$）只有一組解。利用（3,3,3,3,3,3）這組解所成的圖形爲下圖13：

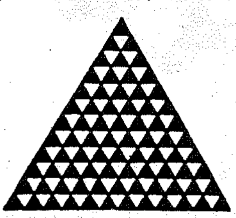

圖 13

另一方面，將（3,3,3,3,3,3）與（3,3,4,12）兩個解配合，可以作成下面這個圖形（參看本刊封面）：

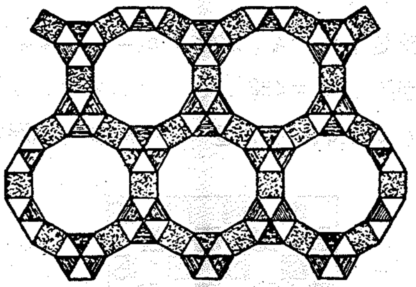

圖 14

以上我們列出了十四種馬賽克的圖案，有興趣的讀者不妨就本文中所舉出的十七個解，試着去設計一些新的圖案。□

棋盤上的馬

勇　清

也許你是一位象棋高手，不過，你可曾注意到這個問題：馬可以走遍棋盤上的每個位置嗎？

同樣的問題，對於其他的棋子，答案都很明顯，即：將、士、象、卒都不能走遍每個位置，而車、包可以走遍每個位置。

下面讓我們借用數學的方法，來證明：馬可以走遍棋盤上的每個位置。

將棋盤的下方邊線定爲x軸，左側邊線定爲y軸，左下角定爲原點，棋盤上方格的邊長爲單位長，如此，棋盤上的每個位置都可以用坐標來表示，若（a,b）表示棋盤上某個位置的坐標，則a與b都是整數，且$0\leqslant a\leqslant 8$，$0\leqslant b\leqslant 9$。

要證明馬可以走遍棋盤上的每個位置，只需要證明：從任何位置（a,b）馬一定可以走到（0,0）。

設$a\leqslant b$，令c表示a與$[b/2]$中之較大者，則在（a，b）位置的馬只需要走c步就可以到達（$a-c$，$b-2c$），它所經的位置依次爲（$a-1$，$b-2$），（$a-2$，$b-4$），…，（$a-c$，$b-2c$）。

其次，依c的定義，我們知道下面三種情形必有一成立：$a-c=0$，$b-2c=0$，$b-2c=1$。

若$b-2c=0$，令$d=[(a-c)/2]$，則下面2d步可使這匹馬到達（$a-c-2d$，0）：（$a-c-1$，2），（$a-c-2$，0），…，（$a-c-2d$，0）。假定$a-c-2d\neq 0$，則$a-c-2d=1$。那麼，下面這3步可使這匹馬到達（0，0）：（3，1），（1，2），（0，0）。

若$a-1=0$，或$b-2c=1$則方法與上面相似。□