四階魔方陣

國立台灣師範大學數學系
趙文敏

一、前言

所謂 n 階魔方陣（$n>1$），乃是將 n^2 個數排列成一個 $n\times n$ 階矩陣，使得下面 $2n+2$ 個和相等：

每一列中 n 個數的和，共有 n 個和；

每一行中 n 個數的和，共有 n 個和；

每一對角線中 n 個數的和，共有兩個和。

若一個 n 階魔方陣中的 n^2 個數是 $1,2,\cdots,n^2$，則此魔方陣稱為是狹義的 n 階魔方陣。

本文的目的，是要介紹一種構建狹義四階魔方陣的方法，這種方法可以構建 432 種不等價的狹義四階魔方陣。

由於本文所討論的魔方陣都是狹義魔方陣，因此，我們把狹義二字略去，而僅稱之爲魔方陣。

二、三階魔方陣

顯然地，（狹義的）二階魔方陣是不存在的。另一方面，三階魔方陣共有八個。我們證明如下：將一個三階魔方陣之元素表示成下圖：

$$\boxed{\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}}\ ,$$

則 a 至 i 等九個元素之和爲 45，於是，每列、每行、每個對角線上三元素之和都是 15。因此，將包含 e 的行、列、對角線上所有元素相加，其和應爲 60，亦即

$3e+(a+b+c+d+e+f+g+h+i)=60,$

於是，$e=5$。即狹義三階魔方陣的中央數必爲 5。

其次，我們要說明：1 不能落在角落中，即 a、c、g、i 等四數都不等於 1。例如，若 $a=1$，則 $b+c=14$，$d+g=14$，$e+i=14$。但是，在 2 至 9 等八個正整數中却沒有三對相異的數能滿足其和爲 14 這個條件（只有兩對，即 5 與 9、6 與 8）。

於是，1 必是 b、d、f、h 四元素中之一。若 $b=1$，則必有 $a=6$，$c=8$，或是 $a=8$，$c=6$。因此，三階魔方陣只有下列這八個：

$$\boxed{\begin{matrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{matrix}}\quad \boxed{\begin{matrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{matrix}}\quad \boxed{\begin{matrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{matrix}}\quad \boxed{\begin{matrix} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{matrix}}$$

$$\boxed{\begin{matrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{matrix}}\quad \boxed{\begin{matrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{matrix}}\quad \boxed{\begin{matrix} 6 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 4 \end{matrix}}\quad \boxed{\begin{matrix} 8 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{matrix}}\ 。$$

三、等價性

仔細地觀察前面的八個三階魔方陣，就能發現：若我們以其中任何一個爲基準，而將它作下

列七種幾何變換，則所得的七個方陣恰好是上述八個中的其餘七個：

(1)繞中心逆時針方向地旋轉 90°；

(2)繞中心逆時針方向地旋轉 180°；

(3)繞中心逆時針方向地旋轉 270°；

(4)繞水平對稱直線鏡射；

(5)繞鉛直對稱直線鏡射；

(6)繞左上右下對角線鏡射；

(7)繞右上左下對角線鏡射。

若兩個 n 階魔方陣具有這個性質：其中之一可由另外一個經過恆等變換或上述七個變換中任何一個而求得，則這兩個 n 階魔方陣稱爲等價魔方陣。

因此，任意兩個狹義的三階魔方陣都是等價的；而且每一個 n 階魔方陣都與八個（包括其本身）n 階魔方陣等價。

四、四階代數魔方陣

首先，我們注意到：在（狹義）四階魔方陣中，每列、每行、每個對角線上四個數之和都是 34，這是因爲由 1 至 16 等正整數之和等於 136。

若在一個四階魔方陣中，其左上之 2×2 階子方陣中四數之和也等於 34，則此四階魔方陣稱爲四階代數魔方陣。

本文的目的，是要證明四階代數魔方陣共有 3456 個，或者說，不等價的四階代數魔方陣共有 432 個。後者是因爲代數魔方陣的等價方陣也是代數魔方陣的緣故。

設有一個四階代數魔方陣之元素表示如下：

$$\begin{array}{|cccc|} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & \ell \\ m & n & p & q \end{array} \qquad (1)$$

則此方陣之元素必滿足下列關係式：

$d=34-a-b-c$,

$f=34-a-b-e$,

$h=34-e-f-g=a+b-g$,

$m=34-a-e-i$,

$j=34-d-g-m=2a+b+c+e-g+i-34$,

$n=34-b-f-j=34-a-b-c+g-i$,

$k=\frac{1}{2}(34+m+n-c-g-a-f)=34-a-c-i$,

$p=34-c-g-k=a-g+i$,

$q=34-m-n-p=a+b+c+e+i-34$,

$\ell=34-d-h-q=34-a-b-e+g-i$。

上述的十個等式，乃是將十個元素都以 a，b，c，e，g，i 等六個元素來表示。如此，我們可得出下列另一些等式：

$\ell-a=f-p=m-h=c-j$,

$n-a=d-p=k-h=e-j$,

$g-a=i-p=b-h=q-j$。

這些等式所代表的意義是什麼呢？且看下面的做法：將四階代數魔方陣(1)中的右上 2×2 階子方陣與左下 2×2 階子方陣對調，其次，將所得方陣的非對角線元素就中心作對稱互換，則所得的方陣爲

$$\begin{array}{|cccc|} a & p & h & j \\ \ell & f & m & c \\ n & d & k & e \\ g & i & b & q \end{array}\ 。 \qquad (2)$$

令 $\ell-a=B$，$n-a=C$，$g-a=D$，則根據前面的等式，方陣(2)可以改寫成下面的形式：

$S(a,p,h,j;B,C,D)=$

$$\begin{array}{|cccc|} a & p & h & j \\ B+a & B+p & B+h & B+j \\ C+a & C+p & C+h & C+j \\ D+a & D+p & D+h & D+j \end{array}\ 。 \qquad (3)$$

於是，對於每個四階代數魔方陣(1)，先將右上與左下兩個 2×2 階子方陣對調，再將非對角線元素就中心對稱互換後，即可得出一個形如 $S(a,p,h,j;B,C,D)$ 之方陣，而且該方陣中的

十六個元素是由1至16等十六個正整數所成。

反之，對於每個由1至16等十六個正整數所成的方陣$S(a,p,h,j;B,C,D)$，先將$S(a,p,h,j;B,C,D)$之非對角線元素就中心對稱互換，再將右上與左下兩個2×2階子方陣對調，則得出一個四階代數魔方陣如下：

$$\boxed{\begin{array}{cccc} a & D+h & B+j & C+p \\ C+j & B+p & D+a & h \\ D+p & j & C+h & B+a \\ B+h & C+a & p & D+j \end{array}} 。 \qquad (4)$$

根據前面的說明，我們得出下面這個定理：

定理1：狹義四階代數魔方陣的個數，與由1至16之正整數所成之方陣$S(a,p,h,j;B,C,D)$的個數相等。

為了敘述的方便起見，我們把由1至16等正整數所成而形如$S(a,p,h,j;B,C,D)$的方陣稱為可接受的方陣。

要計算可接受之方陣$S(a,p,h,j;B,C,D)$的個數，下面這三點性質是有用的：

(1)若$S(a,p,h,j;B,C,D)$是一個可接受之方陣，則將它的列任意重排或行任意重排，所得的方陣仍是一個可接受之方陣。

(2)若$S(a,p,h,j;B,C,D)$是一個滿足$a<p<h<j$及$0<B<C<D$的可接受方陣，則$a=1$，$D+j=16$，而且$p=2$或$B+a=2$。

(3)若$S(a,p,h,j;B,C,D)$是一個滿足$a<p<h<j$及$0<B<C<D$的可接受方陣，則$S(a,p,h,j;B,C,D)$的轉置方陣也是滿足上述兩組不等式的一個可接受方陣；事實上，$S(a,p,h,j;B,C,D)$的轉置方陣就是$S(a,B+a,C+a,D+a;p-a,h-a,j-a)$。

假設滿足$p=2$，$a<p<h<j$，及$0<B<C<D$的可接受方陣$S(a,p,h,j;B,C,D)$共有k個，則依(3)，滿足$a<p<h<j$及$0<B<C<D$的可接受方陣$S(a,p,h,j;B,C,D)$共有$2k$個，再依(1)，可接受之方陣$S(a,p,h,j;B,C,D)$共有$2k\cdot24^2$個。下面我們要證明$k=3$。

設$S(a,p,h,j;B,C,D)$是滿足$a<p<h<j$，$0<B<C<D$及$p=2$的一個可接受方陣；因為$B+a$是第二、三、四列之十二個元素中最小者，故$B+a\leq5$；又因$a=1$，$p=2$，故$3\leq B+a\leq5$。我們分成三種情形來討論：

(1)若$B+a=5$，則$S(a,p,h,j;B,C,D)$之第一列必是1，2，3，及4等四整數所形成，即$a=1$，$p=2$，$h=3$，$j=4$。因此，$C=8$，$D=12$。於是，

$$S(a,p,h,j;B,C,D)=\begin{array}{|cccc|} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{array} \qquad (5)$$

(2)若$B+a=4$，則$p=2$，$h=3$，$B+p=5$，$B+h=6$。於是，$j=7$或$C+a=7$。設$j=7$，則$B+j=10$，$C+a=8$。因此，$C+h=10=B+j$，這是不可能的。設$C+a=7$，則$S(a,p,h,j;B,C,D)$之第四列與第四行必是由10至16等七個正整數所成，但這是不可能的，因為$j+(D+a)=a+(D+j)=17$，而10至16等正整數中沒有兩個能滿足這個條件。因此，$B+a\neq4$。

(3)若$B+a=3$，則$p=2$，$B+p=4$。於是，$h=5$或$C+a=5$。同時，$j\neq8$，$j\neq9$；因為若$j=8$，則$D+a=9$，$D+p=10$，但$B+j=10$，這是不可能的。又若$j=9$，則$D+a=8$，$D+p=9$，這也是不可能的。其次，設$h=5$，則$B+h=7$，於是，j與$D+a$必是一為6，一為11（因為除了1、2、3、4、5、7、8、9之外，只有6與11之和為$17=j+$

$(D+a)$)。但 $j\neq 11$，否則 $D+a=6$，$D+p=7$，這是不可能的，因為，$B+h=7$。於是，$j=6$，而

$$S(a,p,h,j;B,C,D)=\begin{array}{|cccc|}\hline 1 & 2 & 5 & 6\\ 3 & 4 & 7 & 8\\ 9 & 10 & 13 & 14\\ 11 & 12 & 15 & 16\\ \hline\end{array}\ 。\quad (6)$$

另一方面，設 $C+a=5$，則 $C+p=6$。於是，j 與 $D+a$ 必是一為7，一為10。但 $j\neq 7$，否則，因 $h<j$，h 之值必與 a，p，$B+a$，$B+p$，$C+a$，$C+p$ 中之一相等，這是不可能的。因此，$j=10$，而

$$S(a,p,h,j;B,C,D)=\begin{array}{|cccc|}\hline 1 & 2 & 9 & 10\\ 3 & 4 & 11 & 12\\ 5 & 6 & 13 & 14\\ 7 & 8 & 15 & 16\\ \hline\end{array}\ 。\quad (7)$$

根據以上(1)、(2)、(3)，我們得 $k=3$。因此，得出下面這個定理：

定理 2：狹義四階代數魔方陣共有3456個。

五、四階代數魔方陣的分類

在 3456 個代數魔方陣中，我們可以用一種很簡單的辦法將它們分成九類。首先，將可接受之方陣 $S(a,p,h,j;B,C,D)$ 改寫成

$$T(a,p,h,j;A,B,C,D)=\begin{array}{|cccc|}\hline A+a & A+p & A+h & A+j\\ B+a & B+p & B+h & B+j\\ C+a & C+p & C+h & C+j\\ D+a & D+p & D+h & D+j\\ \hline\end{array}\quad (8)$$

根據前節之證明，我們知道：若 a,p,h,j,A,B,C,D 都是非負整數且只有 A,B,C,D 中之一為零，則 $T(a,p,h,j;A,B,C,D)$ 是一個可接受之方陣的充要條件是下列六種情形中之一成立：

(1) $\{a,p,h,j\}=\{1,2,3,4\}$，
$\{A,B,C,D\}=\{0,4,8,12\}$，

(2) $\{a,p,h,j\}=\{1,2,5,6\}$，
$\{A,B,C,D\}=\{0,2,8,10\}$，

(3) $\{a,p,h,j\}=\{1,2,9,10\}$，
$\{A,B,C,D\}=\{0,2,4,6\}$，

(4) $\{a,p,h,j\}=\{1,5,9,13\}$，
$\{A,B,C,D\}=\{0,1,2,3\}$，

(5) $\{a,p,h,j\}=\{1,3,9,11\}$，
$\{A,B,C,D\}=\{0,1,4,5\}$，

(6) $\{a,p,h,j\}=\{1,3,5,7\}$，
$\{A,B,C,D\}=\{0,1,8,9\}$。

在前面這六組解中，我們發現一個很有趣的性質：a,p,h,j 四數中，必有二數之和等於另二數之和；而 A,B,C,D 四數中，必有二數之和等於另二數之和。於是，我們很自然地可以分成下列九類：

(1) $a+p=h+j$，$A+B=C+D$，
(2) $a+p=h+j$，$A+C=B+D$，
(3) $a+p=h+j$，$A+D=B+C$，
(4) $a+h=p+j$，$A+B=C+D$，
(5) $a+h=p+j$，$A+C=B+D$，
(6) $a+h=p+j$，$A+D=B+C$，
(7) $a+j=p+h$，$A+B=C+D$，
(8) $a+j=p+h$，$A+C=B+D$，
(9) $a+j=p+h$，$A+D=B+C$。

利用排列組合的理論，很容易地就能證明：上述九類中，每一類所含的可接受方陣 $T(a,p,h,j;A,B,C,D)$ 都有 $6\times 8\times 8=384$ 個。

當我們寫出可接受之方陣 $T(a,p,h,j;A,B,C,D)$ 所對應的代數魔方陣時，上述的九類都具有一種有趣的形式。這種情形是根據相餘元素的相對位置來說明的；所謂相餘元素，乃是指和等於17的一對正整數。讓我們用同一個字母來表示相餘的兩個元素，則前述的九類代數魔方陣可分別表示如下：

(1) $\begin{array}{|cccc|}\hline a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ e & f & g & h \\ f & e & h & g \\ \hline\end{array}$ ，
(2) $\begin{array}{|cccc|}\hline a & b & b & a \\ c & d & d & c \\ e & f & f & e \\ g & h & h & g \\ \hline\end{array}$ ，

(3) $\begin{array}{|cccc|}\hline a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ \hline\end{array}$ ，
(4) $\begin{array}{|cccc|}\hline a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ e & f & g & h \\ a & b & c & d \\ \hline\end{array}$ ，

(5) $\begin{array}{|cccc|}\hline a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ c & d & a & b \\ g & h & e & f \\ \hline\end{array}$ ，
(6) $\begin{array}{|cccc|}\hline a & a & b & b \\ c & c & d & d \\ e & e & f & f \\ g & g & h & h \\ \hline\end{array}$ ，

(7) $\begin{array}{|cccc|}\hline a & b & c & b \\ c & d & c & d \\ e & f & e & f \\ g & h & g & h \\ \hline\end{array}$ ，
(8) $\begin{array}{|cccc|}\hline a & b & c & d \\ a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ e & f & g & h \\ \hline\end{array}$ ，

(9) $\begin{array}{|cccc|}\hline a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ h & g & f & e \\ d & c & b & a \\ \hline\end{array}$ 。

六、四階非代數魔方陣舉例

在四階魔方陣中，並不是每個都是代數魔方陣；也就是說，四階魔方陣中，左上2×2 階子方陣中四數之和不一定等於 34 。

在前節所介紹的第(2)類四階代數魔方陣中，將第一行的 c 與 e 對調，再將第四行的 c 與 e 對調，則得出一個四階非代數魔方陣如下：

$$\begin{array}{|cccc|}\hline a & b & b & a \\ e & d & d & e \\ c & f & f & c \\ g & h & h & g \\ \hline\end{array} ,$$

就其形狀而言，這個方陣與前節的(2)相似；但在前節的(2)中，$a+b+c+d=34$，於是，$a+b+e+d\neq 34$ 讀者可用 $a=1$，$b=4$，$c=14$，$d=15$，$e=8$，$f=5$，$g=11$，$h=10$ 代入，則得出下列兩個魔方陣：

$$\begin{array}{|cccc|}\hline 1 & 4 & 13 & 16 \\ 14 & 15 & 2 & 3 \\ 8 & 5 & 12 & 9 \\ 11 & 10 & 7 & 6 \\ \hline\end{array} ,\quad \begin{array}{|cccc|}\hline 1 & 4 & 13 & 16 \\ 8 & 15 & 2 & 9 \\ 14 & 5 & 12 & 3 \\ 11 & 10 & 7 & 6 \\ \hline\end{array} ,$$

顯然地，一個是代數魔方陣，一個則不是。

在第(4)類四階代數魔方陣中，將第一列的 b 與 c 對調，再將第四列的 b 與 c 對調，也可得出一個四階非代數魔方陣。這兩個方法，使我們能夠建構 2 × 384 = 768 個四階非代數魔方陣。

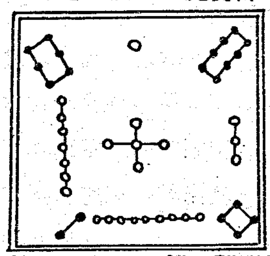
結　語

在本文第三節的魔方陣(4)中，令 a = 7 ，h = 11, j = 3 , p = 15, B = − 2 , C = − 1 , D = 1 ，則所得的四階代數魔方陣爲

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

這個四階魔方陣是世界上最早的四階魔方陣，它是出現在十一或十二世紀印度Khajuraho的碑文上。

另一方面，世界上最早出現的魔方陣，則是我國的洛書，那是一個三階魔方陣：



在本文第二節中，我們已證明了：三階狹義魔方陣只有八個，而這八個都是等價的。另一方面，四階狹義魔方陣共有 7040 個，這個數值是 Frenicle de Bessy所找到並發表在 1693 年。至於五階狹義魔方陣則共有 2,202,441,792 個。這件事實是在 1973 年Richard Schroeppel 利用PDP-10 電子計算機花了差不多一百小時才求出來的。 □