智慧競賽

勇清

Leonardo Fibonacci（1170-1250）是中世紀的一位數學天才，他出生於意大利的比薩，由於這個原因，人們稱他爲 Leonardo Pisano，意即比薩的 Leonardo。1202 年，Fibonacci 寫了 Liber Abaci 一書，在其中他解說印度阿拉伯數字，以及如何應用它們以做計算，這本書對於印度阿拉伯數字之取代當時通用的羅馬數字，功不可沒。在這本書裏，他以兔子問題爲例，而引出了現代所謂的 Fibonacci 數列：

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \cdots\cdots,$$

事實上，若以 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 表示 Fibonacci 數列，則

$$a_1=1，a_2=1，而且 a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$$

1963 年，一羣熱心的數學家覺得 Fibonacci 數列仍然有許多有趣的問題值得探討，乃成立 Fibonacci Association，並發行 Fibonacci Quarterly。

Fibonacci 因爲智慧超羣，名聲遠播，連皇帝 Frederik 二世都有所耳聞。1225 年，皇帝趁途經比薩之便，特地組成一個競智隊要來測驗 Fibonacci 的智慧。在他們提出來考 Fibonacci 的問題中，有一題是這樣的：試求一個（有理數的）完全平方，使得該數加以 5 及減去 5 之後，仍是一個（有理數的）完全平方。

對於這個問題，Fibonacci 所提出的答案是 $\left(\frac{41}{12}\right)^2$，因爲

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2-5=\left(\frac{31}{12}\right)^2，\left(\frac{41}{12}\right)^2+5=\left(\frac{49}{12}\right)^2。$$

除了這個答案之外，讀者能求出其他的解嗎？

設 a 與 b 爲二實數，則

$$(a^2-2ab-b^2)^2，(a^2+b^2)^2，$$
$$(a^2+2ab-b^2)^2$$

是一個等差數列，其公差爲 $4ab(a^2-b^2)$。因此，若我們選取 a 與 b，使得 $a^2-2ab-b^2$，a^2+b^2，以及 $a^2+2ab-b^2$ 都是有理數，而且 $4ab(a^2-b^2)=5$，則上述三個平方的中項就是一個解。Fibonacci 所提出的解是以 $a=\frac{5}{\sqrt{12}}$，$b=\frac{4}{\sqrt{12}}$ 代入而得的。若令

$$a=\frac{41^2}{\sqrt{24\times31\times41\times49}}$$

$$b=\frac{720}{\sqrt{24\times31\times41\times49}}$$

則 $(a^2+b^2)^2$ 也是上述問題的一個解。

事實上，若 a 與 b 爲二實數，使得 $(a^2+b^2)^2$ 是上述問題的一個解，令

$$A=\frac{(a^2+b^2)^2}{\sqrt{2(a^2+b^2)\sqrt{(a^2+b^2)^4-25}}}，$$

$$B=\frac{5}{\sqrt{2(a^2+b^2)\sqrt{(a^2+b^2)^4-25}}}，$$

則 $(A^2+B^2)^2$ 也是上述問題的一個解。因此，這個問題的解有無數多個。□