

每一個函數都可以表為一個 一對一函數與一映成函數 的合成函數嗎？

國立台灣教育學院科學教育系數學組 洪木盛

一、上面問題的答案是肯定的。要證明它需要下列預備知識：

(1) 在一集合中的「關係」：

設 X 為一非空集合。

我們說 R 為 X 中之一關係 $\Leftrightarrow R$ 為 $X \times X$ 之一子集。

例如，若 $R^\#$ 表實數集，則

$$R = \{ (x, y) \mid x, y \in R^\#, x < y \}$$

為 $R^\#$ 中之一關係。而 $\forall a, b \in R^\#$,

$$(a, b) \in R \Leftrightarrow a < b$$

以後，用 $a R b$ 取代 $(a, b) \in R$ 因此，上式可改寫為：

$$a R b \Leftrightarrow a < b$$

(2) 對等關係：

令 X 為一非空集合。

我們說 “ $\sim$ ” 為 X 中之一「對等關係」 $\Leftrightarrow$

“ $\sim$ ” 為 X 中之一關係且要滿足下列條件：

(a) $a \sim a, \forall a \in X$ (反身性)

(b) $\forall a, b \in X, a \sim b \Rightarrow b \sim a$ (對稱性)

(c) $\forall a, b, c \in X, a \sim b, b \sim c \Rightarrow$

$$a \sim c \quad (\text{遞移性})$$

例如，若 n 為一固定正整數， $\forall a, b \in Z$

(整數集)

$$\text{定 } a \equiv_n b \Leftrightarrow a - b = nk, \text{ 對某 } k \in Z$$

則 “ $\equiv_n$ ” 為 Z 中之一對等關係。

(3) 對等類：

若 “ $\sim$ ” 為集合 X 中之一對等關係， $a \in X$ ，則定

$$[a] = \{ x \mid x \in X, x \sim a \}$$

稱 $[a]$ 為由 a 所決定之「對等類」。以 $X/\sim$ 表 “ $\sim$ ” 之所有對等類之集合。即

$$X/\sim = \{ [a] \mid a \in X \}$$

(4) 一些關於對等類的性質：

若 “ $\sim$ ” 為集合 X 中之一對等關係，則

(a) $\forall a \in X, [a] \neq \phi$

(b) $b \in [a] \Rightarrow [a] = [b]$

(c) $\forall a, b \in X,$

$$[a] = [b] \Leftrightarrow a \sim b$$

(d) $\forall a, b \in X, [a] \cap [b] = \phi$

或 $[a] = [b]$

(e) $\cup X/\sim = X$ (註一)。

二、具備上述預備知識之後，最初問題的證明如下：

(1) 令 $f: X \rightarrow Y$ 為任一函數

$$\forall a, b \in X, \text{ 定 } a \sim b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$$

則 “ $\sim$ ” 為 X 中之一對等關係。(請讀者

自己證明)

$$\text{若 } a \in X, \text{ 則 } [a] = \{ x \mid x \in X, x \sim a \}$$

而 $X/\sim = \{ [a] \mid a \in X \}$

(2) 定 $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$

$$[a] \rightarrow f(a)$$

即 $\bar{f}([a]) = f(a), \forall [a] \in X/\sim$

因 $[a] = [b] (a, b \in X)$

$\Leftrightarrow a \sim b$ (由(4)中性質(c))

$\Leftrightarrow f(a) = f(b)$ (由“ $\sim$ ”之定義)

故 $\bar{f}$ 之定義完善 (即 $\bar{f}$ is well defined)

因 $\forall [a], [b] \in X/\sim,$

$\bar{f}([a]) = \bar{f}([b]) \Rightarrow f(a) = f(b)$

$$\Rightarrow [a] = [b]$$

故 $\bar{f}$ 爲一對一函數。

(3) 定 $g : X \rightarrow X/\sim$

$$a \rightarrow [a]$$

即 $g(a) = [a], \forall a \in X$

顯然 g 爲一映成函數。

(4) 因 $g : X \rightarrow X/\sim$

$$\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$$

故 $\bar{f}og$ 存在且 $\bar{f}og : X \rightarrow Y$

因 $\bar{f}og(a) = \bar{f}(g(a)) = \bar{f}([a]) = f(a), \forall a \in X$

故 $f = \bar{f}og$ (證明完成)

註一、 $\cup X/\sim$ 表 $X/\sim$ 中所有對等類的聯集

例如, 若 $X/\sim = \{[a], [b], [c]\}$

則 $\cup X/\sim = [a] \cup [b] \cup [c]$

註二、本問題取自 DAVID M. BURTON 編

著之 ABSTRACT AND LINEAR

ALGEBRA



如何平分八斤油

勇清

如果你有一桶油, 共有八斤。現在想把它分成兩個四斤, 可是你只有兩個油瓶, 一個裝滿是五斤, 另一個裝滿是三斤。只利用這些工具, 你能把八斤油分成兩個四斤嗎?

下面我們提出一種方法, 它共需八個步驟, 當然, 這個問題不一定只有一種方法:

(1) 先將小瓶裝滿, 得三斤;

(2) 將小瓶中的三斤油倒入五斤瓶中;

(3) 再將油桶中的油裝滿小瓶, 得三斤;

(4) 將小瓶中的油倒入五斤瓶中, 將五斤瓶裝滿, 則小瓶剩下一斤油;

(5) 將五斤瓶中的五斤油倒回桶中;

(6) 將小瓶中的一斤油倒入五斤瓶中;

(7) 將桶中之油倒入小瓶中裝滿, 則桶中剩四斤油;

(8) 將小瓶中的三斤油倒入五斤瓶中, 則五斤瓶中也是四斤油。

上面這個問題, 也應用到一點數學上的道理, 因爲 3 與 5 互質, 所以, 一定有兩個正整數 m 與 n , 使得 $3m - 5n = 1$; 在上面的方法中, 我們是取 $m = 2$ 及 $n = 1$ 。

下面我們舉出一個類似的問題, 讀者可做做看: 有一個裝滿十斤的油桶, 另外還有兩個瓶, 一個裝滿是三斤, 一個裝滿是七斤, 現在要把十斤油分成兩個五斤, 應該如何分法?

