圖形學簡介

國立台灣師範大學數學系 吳森原

1. 什麼是圖形

如果我們在一個平面上或空間，任意取 n 個點，然後將其中各點以線連接起來，所得的形狀，就是一種圖形。例如，我們在平面上，取五個點 v_1，v_2，v_3，v_4，與 v_5，並將各點之間以線連接如圖1，就是一個圖形。在數學上，比較

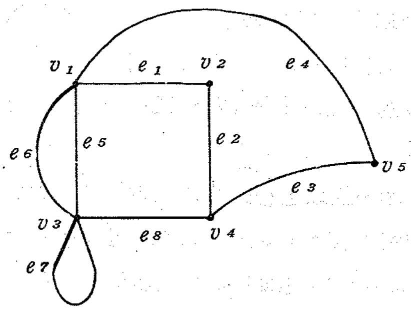


圖1

嚴密的定義如下：

設 $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ 是一個集合且 $E=\{e_1, e_2, \cdots, e_q\}$ 也是一個集合，其中 $e_k=\{v_i, v_j\}$，$v_i, v_j \in V$，且 $k=1, 2, \cdots, q$，則序對 (V, E) 稱爲一個圖形（graph），以 $G=(V, E)$ 表示。V 中的元素，稱爲圖形 G 的頂點（Vertices），E 中的元素，稱爲圖形 G 的線（Edges）。若 $e_k=\{v_i, v_j\}$，則稱線 e_k 連接二個頂點 v_i 與 v_j，此時亦稱頂點 v_i 與 v_j 是相鄰的（Adjacent）。一個圖形最簡單且常用的表示法，乃是在平面上直接用圖來表示。我們在平面上，用點表示圖形的各頂點，若圖形中的某二個頂點相鄰時，則將此二點以線段或曲線連接之，如圖2。

在圖1中，我們得到圖形 G 的五個頂點是 v_1，v_2，v_3，v_4 與 v_5，八條線是 e_1，e_2，e_3，e_4，e_5，e_6，e_7 與 e_8，即 $G=(V, E)$，其中 $V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ 且 $E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$。在圖1中，類似 e_5 與 e_6 的線，稱爲重線（Multiple edges）；類似 e_7 的線，則稱爲迴線（Loops）。爲方便起見，一般我們所討論的圖形，都是限制沒有重線，也沒有迴線。

當我們在平面上，直接以圖來表示一個圖形

圖2

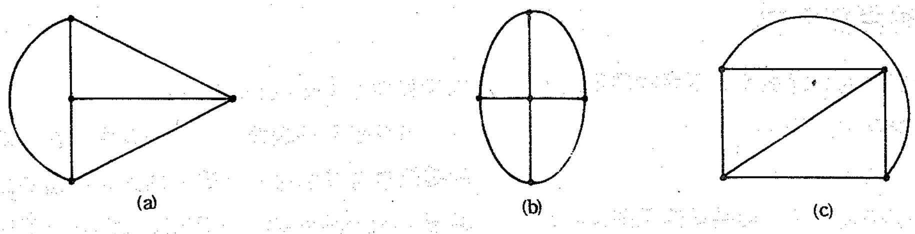


圖 3

時，圖中的線，使用線段或曲線來表示均可，並無區別。在圖形學中，判別二個圖形是否相同，主要的是觀察它們各頂點的相鄰關係是否相同，而與所畫出來的圖的形狀無關。例如，在圖 3 中，(a)，(b)與(c)均表示相同的圖形。又如，由四個頂點所形成的相異圖形，共有十一種，如圖 4 所示。

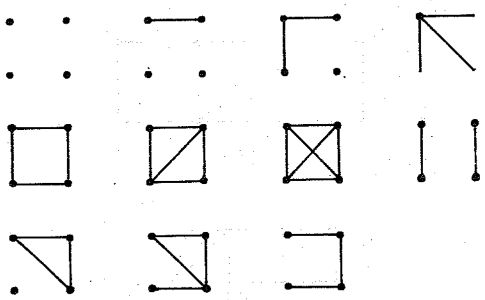


圖 4

設 G 是一個圖形，在 G 中自某一個頂點 v_1 出發，沿着通過此頂點的某一條線，到達圖形的另外一個頂點 v_2，然後又沿着通過 v_2 的某一條線，又到達圖形的另外一個頂點 v_3，如此繼續下去，假設最後到達一個頂點 v_k，則依次由這些頂點所形成的序列，我們稱爲圖形 G 的一條道路（Walk），以（v_1，v_2，…，v_k）表示。若這一條道路的 v_1 和 v_k 是相同的頂點，則稱這一條道路是一條封閉的道路，否則就稱爲開放的道路。若這一條道路所經過的各頂點均相異，則這一條道路，我們稱爲路線（Path）。若這一條道路所經過的各線均相異（但是頂點可能會重複），則這一條道路，我們稱爲路徑（Trail）。例如，在圖 5 中，（v_1，v_2，v_3，v_5，v_1）就

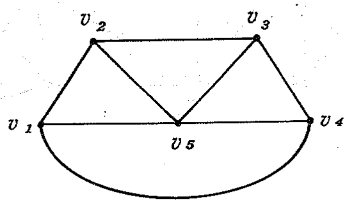


圖 5

是一條封閉的路線，而（v_1，v_2，v_5，v_3，v_4，v_5，v_1）則是一條封閉的路徑。設 G 是一個圖形，若 G 中任取二個頂點，都有一條路線連接此二個頂點，則此圖形 G 稱爲一個連接圖形（Connected graph），否則稱爲不連接圖形（Disconnected graph）。例如，圖 5 就是一個連接圖形，而圖 6 則不是一個連接圖形，因爲

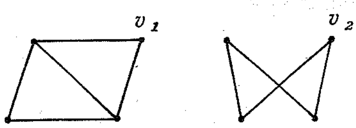


圖 6

在圖 6 中，我們若取二個頂點 v_1 和 v_2 如圖 6 所示，則不存在一個路線連接此二點。類似圖 6 的圖形，我們稱爲有二個分支。

2.圖形學的主要內容

圖形學所研究的問題很多，下面我們舉出十個比較重要的項目來討論。

(1)連接性（Connectivity）

設有一個連接圖形G，則將G的某些頂點或某些線去掉後，G可能會變成一個不連接的圖形。例如，在圖7中，若將頂點v_1及v_2去掉後，則變成一個不連接的圖形，如圖8所示。連接性就是研究圖形的這種性質。

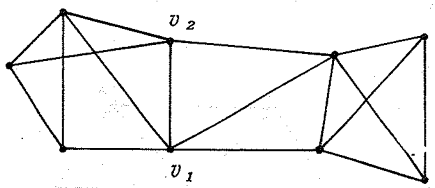


圖 7

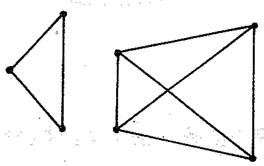


圖 8

(2)樹（Trees）

設G是一個連接圖形，若在G中找不到一條封閉的路線，此時G稱爲一棵樹（Tree）。例如，圖9就是一棵樹。樹的應用很廣，是圖形學中很重要的部份。

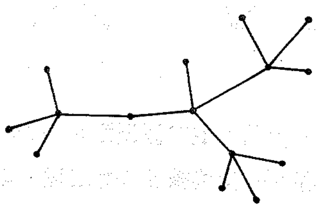


圖 9

(3)橫貫性（traversability）

設G是一個連接圖形，若G中存在一條封閉的路徑包含G的每一條線，則此圖形稱爲Euler圖形。例如，圖10.就是一個Euler圖形，但圖11.則不是一個Euler圖形。與Euler圖形比較有關的是我們平常所稱的一筆畫圖形（Unicursal graphs）。例如，圖11.與圖12，都不是Euler圖形，但這二個圖形都是一筆畫圖形。

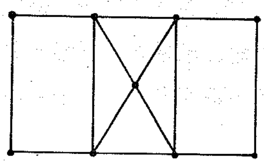


圖 10

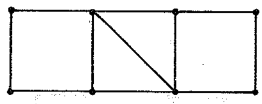


圖 11

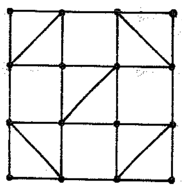


圖 12

設G是一個連接圖形，若G中存在一條封閉的路線包含G的每一個頂點，則此圖形稱爲Hamilton圖形。例如，圖13.是一個Hamilton

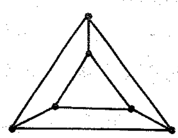


圖 13

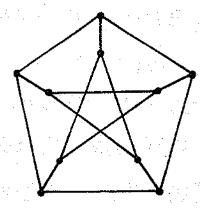


圖 14

圖形，但圖14.並不是一個Hamilton圖形。到目前爲止，我們尙未發現一個簡單的法則，來判斷一個圖形是否爲Hamilton圖形。

(4)平面性（Planarity）

設G是一個連接圖形，若將G中的各頂點畫在一個平面上，然後將G的各線依次畫出來，若G畫出來後，能使G中各線除頂點外均不相交叉，則此圖形稱爲可平面化圖形（Planar graphs）。例如，圖13.是一個可平面化圖形，但圖14.則不是一個可平面化的圖形。K. Kuratowski 在1930年發表了判別可平面化圖形的方法，但目前仍有很多人在研究這一方面的各種性質。

(5)着色性（Colorability）

設G是一個圖形，若將G的各頂點分別塗上各種顏色，使得相鄰的二個頂點分別塗上不相同的顏色時，則最少應當使用多少種顏色？例如，圖15.最少應當使用3種顏色。有關圖形的着色性

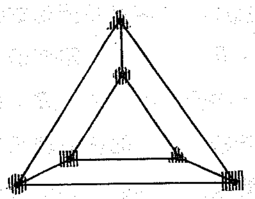


圖 15

，最有名的乃是我們所熟知的“四色問題”，即每一個可平面化的圖形，最多可用四種相異的顏色將圖形的各頂點分別塗上顏色，使相鄰二個頂點分別塗上不相同的顏色。四色問題在1976年已經被證明可以成立。

(6)矩陣（Matrices）

設$G=(V, E)$是一個圖形且$V=\{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$。我們定義一個矩陣$A=(a_{ij})_{p\times p}$如下：

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若頂點 } v_i \text{ 與 } v_j \text{ 是相鄰。} \\ 0, & \text{其他情形。}\end{cases}$$

則此矩陣A稱爲圖形G的相鄰矩陣（Adjacency matrix）。矩陣A的固有值，稱爲圖形G的固有值。與圖形有關的矩陣，尙有入射矩陣、電路矩陣等等。

(7)群（Groups）

設$G=(V, E)$是一個圖形且$V=\{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$。將$v_1, v_2, \cdots, v_p$任意排成一列，我們可得到$p!$種不同的排列法。在這些排列中，若仍然保持有圖形$G$的相鄰關係時，則這種排列我們稱爲圖形$G$的自同構函數（Automorphisms）。將一個圖形的全部自同構函數放在一起，所形成的集合，可以形成一個群。我們從這一個群的性質，可以判別圖形的各頂點或各線是否具有對稱性，也可以進一步了解圖形的其他對稱性質。

(8)枚舉（Enumeration）

枚舉問題是研究具有相同數目的頂點與相同數目的線的相異圖形之個數的問題。這種問題可應用到計算化學同分異構物之個數，進而研究新化合物的問題。例如，由六個點所形成的樹，共有六種，如圖16.。

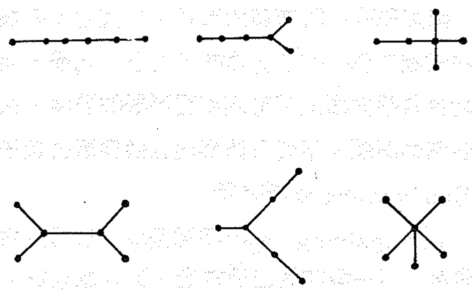


圖 16

(9)有向圖形（Digraphs）

若將圖形的每一條線加上方向，則形成一個有向圖形（Digraph）。例如，圖17.就是一個有向圖形。有向圖形在電學的電路上，應用很廣。

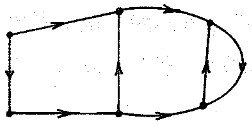


圖 17

⑽網路流程（Network flows）

在一個圖形的各線上分別標上一個實數，表示各該線的“線容量”，則這種圖形，我們稱爲網路（Networks）。例如，圖18就是一個網

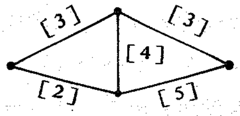


圖 18

路。在一個網路中，各線上的線容量可以表示此線的最大負荷量，也可以表示此線二端點間的距離或貨物的運費等等。因此在商業上應用很廣。網路流程也是作業研究的一個重要分支。

3. 圖形學的應用

圖形學是一門新興的學科，其應用範圍很廣，在電機工程、電子計算機、物理、化學、生物與社會科學方面，都可利用圖形學的理論，來解決各別的問題。下面我們舉出五個簡單的例子。

㈠Königsberg 橋樑問題

Königsberg 橋樑問題是圖形學中最有名的問題，這一個問題已很古老，但久懸未解，一直到 1736 年才由Euler利用圖形的方式加以解決。Euler 這一篇論文，乃是圖形學的第一篇論文，也是拓撲學發展的基石。以前在德國北部普魯士省有一個地方，叫Königsberg，其地形如圖19，（現在地名是Kaliningrad，位在蘇俄西部），被一條布拉格河分隔成中間二個小島，當地居民在河上建造七個橋樑以連接各地，見圖19。現在假設有一人要由陸地中的某地出發，以步行通過七個橋樑，每座橋樑只准通過一次，

圖 19

且最後還要回到原出發地，則這人應當如何走法才可以如願？Euler 將圖19簡化成圖20，將陸地分別標上A，B，C，D，四部份，然後再畫成圖21的形式。在圖21中，A，B，C，D四點分別表示四塊陸地，圖中的線則表示橋樑。Euler證明了這一個問題是無解的。Königsberg橋樑問題與平常我們所稱的一筆畫圖形有密切關係。

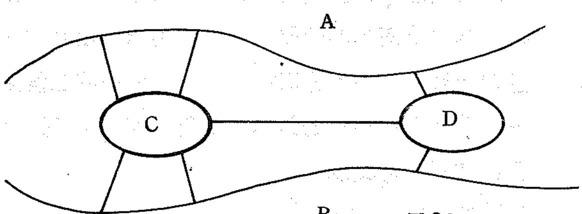


圖 20

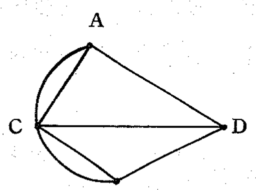


圖 21

㈡公用設備問題

設某城市有三個新社區，H_1，H_2與H_3，每一社區都要與自來水廠（W），瓦斯工廠（G）與發電廠（E）直接以導管相連接，如圖22所示。則是否有辦法使得各社區所使用的導管彼此均不相交叉？

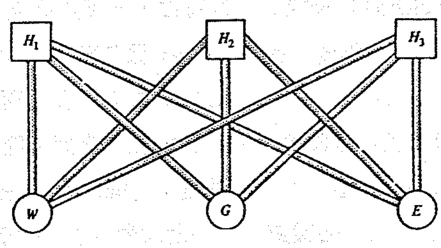


圖 22

我們可用圖形的方式，將這一個問題化成圖23.的形式。圖中的點表示三個新社區H_1，H_2，H_3與自來水廠、瓦斯工廠、發電廠；圖中的線則表示使用的導管。利用圖形學的理論，我們可以得知本題無解。

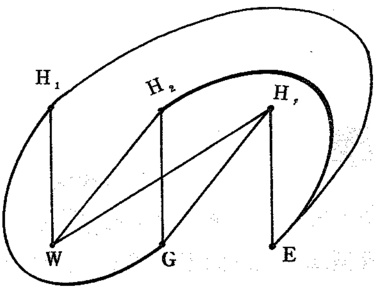


圖 23

㈢電機網路問題

設有一個電機網路如圖24.，則可用圖形表示如圖25.。然後利用圖形學的理論，來研究原來網路上各點的電位差、電流等等。

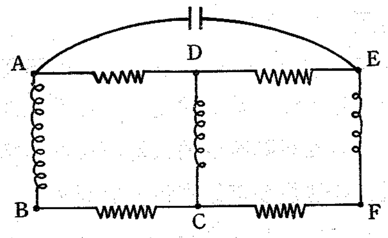


圖 24

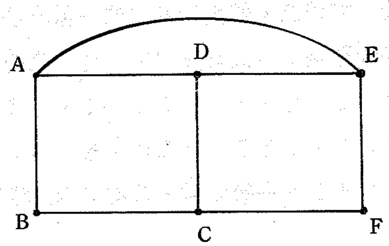
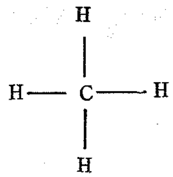


圖 25

㈣化學同分異構物

化學元素的構造式，均可用圖形來表示。例如，甲烷（CH_4）的構造式為：



我們可用圖形表示如圖26.的形式。然後利用圖形的枚舉問題，進而研究化學上同分異構物之網數，以發現新化合物。

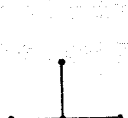


圖 26

㈤座位問題

設某俱樂部共有九位會員，每天他們聚在一個圓桌上共吃午餐。他們決定座位每天更換，使得每天每人坐在相隣座位的人均不再重複相隣而坐，則這種坐法最多可以實行多少天？

本問題可用圖形來表示，將九位會員以九個點表示，若二人相隣而坐，則將此對應之二頂點以線連接。如圖27，即表示其中的一種坐法。利用圖形學的理論，可以計算出來這種相異的坐法共有四種，即1 2 3 4 5 6 7 8 9 1，1 3 5 2 7 4 9 6 8 1，1 5 7 3 9 2 8 4 6 1與1 7 9 5 8 3 6 2 4 1。一般而言，若有n個人時，則

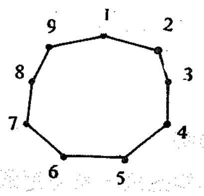


圖 27

此種相異的坐法有$\frac{n-1}{2}$種（當n爲奇數時）或$\frac{n}{2}$種（當n爲偶數時）。

4. 圖形學簡史

Euler 在1736年證明Königsberg 橋樑問題的論文，乃是圖形學的第一篇論文。此後100年，全是一片空白。在1847年，G.R. Kirchhoff 發現了樹的特性，並應用到電機網路上。10年後，A. Cayley爲了研究飽和炭氫化合物C_nH_{2n+2}的同分異構物之個數，而發現了計算樹的個數的公式。大約在此時期，圖形學上另外二個重要的里程碑是四色問題和W.R. Hamilton的環遊世界一週問題。在1936年，D. König 將前人及他本人的結果，彙編成書出版，這是圖形學的第一本書。最近 30 年，乃是圖形學大放光彩的時期，尤其是最近10年，有關圖形學的書相繼問世，目前圖形學上的領導人物有C. Berge（法國），P. Erdös（匈牙利），W. Tutte（加拿大）與F. Harary（美國）等等

電燈開關的數學

勇清

樓梯間的電燈，通常都是在樓上、樓下各裝一個雙連開關，這樣，在樓下開燈照亮了樓梯，走到樓上後可以把燈關掉，同樣，也可以在樓上開燈，而在樓下關燈。這種開關的裝法是這樣的：樓上與樓下的開關都有上點與下點，兩個上點用電線接起來，稱爲上線；兩個下點也用電線接起來，稱爲下線。

當兩個開關都扳上時，電流從上線通過，電燈就亮了。兩個開關都扳下時，電流從下線通過，電燈也會亮。如果兩個開關一個扳上一個扳下，則不論上線或下線，電流都不通，電燈自然是不亮了。

因此，當電燈不亮時，兩個開關必是一個扳上一個扳下，這時，不論在樓上或樓下扳一下，兩個開關就變成同上或同下，電燈就亮了。再扳一下，兩個開關又變成一上一下，電燈又不亮了。因此，兩個開關就像一個開關那麼方便。

如果我們以$x=1$表示樓上開關扳上，$x=0$表示樓上開關扳下；$y=1$表示樓下開關扳上，$y=0$表示樓下開關扳下；$z=1$表示電燈亮，$z=0$表示電燈不亮。那麼，x，y，z三個變數就會滿足下面這個關係式：

$$z=2xy-x-y+1$$
$$=xy+(1-x)(1-y)。$$