蟠桃線(fairy peach curve)之一般式及其退化圖形

嘉義縣立新港國中　王友仁

一、**前言**：本文屬一篇研究報告，獨自創造已發展成一系統，歷經八個月方才定稿。期間由於周金珠同仁的提出建議與鼓勵，周培賢同仁的提供英文名稱，還有新港國中全體同仁的關懷與照顧，在此皆一併致謝。不才才疏，恐有謬誤，治學之中懷著戰兢之神，嚴謹態度，大膽細證，實驗致知，質疑而踏實，以完成本文，希先進先賢指導並賜教之。

二、**本文**：首先考慮(1) $\gamma=\sin^{\frac{1}{2}}\theta$，(2) $\gamma=\sin\theta$，(3) $\gamma=\sin^{\frac{3}{2}}\theta$ 三個極方程式在 $0\leq\theta\leq\pi$ 之間圖形的特徵，再推而廣之，給以一般化的公式，並研究其退化圖形。

以 $\pi-\theta$ 代換 θ，則上述三個極方程式皆得同義方程式，此三極方程式的圖形對稱於直線 $\theta=\frac{\pi}{2}$，因此，只要我們繪出 $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ 間的圖形，則 $\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\pi$ 間的圖形可依對稱性繪成。

又因(2) $\gamma=\sin\theta$，$0\leq\theta\leq\pi$，為圓的極方程式，請看

$$\gamma=\sin\theta\Longrightarrow\gamma^2=\gamma\sin\theta$$

$$\Longrightarrow x^2+y^2=y\Longrightarrow x^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$$

於直角坐標中，其圖形是以 $(0,\frac{1}{2})$ 為圓心，以 $\frac{1}{2}$ 為半徑的一圓。那麼，另外兩個極方程式，是否也代表圓呢？或是另外一些不知名的奇異圖形呢？今以曲率說明之：設 $\gamma=f(\theta)$，f' 與 f'' 分別代表 f 的第一階與第二階導數，則

$$曲率K=\frac{f^2+2f'^2-ff''}{(f^2+f'^2)^{\frac{3}{2}}}，$$

$$曲率半徑R=\frac{1}{K}。$$

若 $f(\theta)=\sin\theta$，$0\leq\theta\leq\pi$，則它的曲率半徑 $R=\frac{1}{2}$，而曲率 K 是 2，與上述討論相吻合。

意即：曲率 K 與曲率半徑 R 不隨著 θ 改變而有任何相異值出現。

由是知：一圓的彎曲，其曲率乃屬一定不變，而圓上任一點的曲率均等於其半徑的倒數，也因此在圓上所有點的曲率均相同。

若 $f(\theta)=\sin^{\frac{1}{2}}\theta$，$0\leq\theta\leq\pi$，則

$$K=\frac{6\sin^{\frac{1}{2}}\theta(1+\sin^2\theta)}{(1+3\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}，$$

$$R=\frac{(1+3\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}{6\sin^{\frac{1}{2}}\theta(1+\sin^2\theta)}，$$

當 $\theta_1=\frac{\pi}{6}$ 時，$K=\frac{30\sqrt{14}}{49}$，$R=\frac{7\sqrt{14}}{60}$，

當 $\theta_2=\frac{\pi}{4}$ 時，$K=\frac{18\sqrt[4]{50}}{25}$，$R=\frac{5\sqrt[4]{200}}{36}$

，意即，θ 值分別取 $\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{4}$ 時，K 與 R 值各不相同，因之，得知 $f(\theta)=\sin^{\frac{1}{2}}\theta$，$0\leq\theta\leq\pi$，非一圓形。

若 $f(\theta)=\sin^{\frac{3}{2}}\theta$，$0\leq\theta\leq\pi$，隨所取 θ 值不同，K 與 R 值亦不同，故其圖形不是一圓。

下面我們試繪出上述三個極方程式的圖形，以下各值精確之小數二位為止：

(1) $\gamma = sin^{\frac{1}{2}}\theta$ (2) $\gamma = sin\theta$ (3) $\gamma = sin^{\frac{3}{2}}\theta$

θ	γ	θ	γ	θ	γ
0	0	0	0	0	0
$\frac{\pi}{12}$	0.50	$\frac{\pi}{12}$	0.25	$\frac{\pi}{12}$	0.13
$\frac{\pi}{8}$	0.61	$\frac{\pi}{8}$	0.38	$\frac{\pi}{8}$	0.23
$\frac{\pi}{6}$	0.70	$\frac{\pi}{6}$	0.50	$\frac{\pi}{6}$	0.35
$\frac{\pi}{4}$	0.84	$\frac{\pi}{4}$	0.70	$\frac{\pi}{4}$	0.59
$\frac{\pi}{3}$	0.93	$\frac{\pi}{3}$	0.86	$\frac{\pi}{3}$	0.80
$\frac{5\pi}{12}$	0.98	$\frac{5\pi}{12}$	0.96	$\frac{5\pi}{12}$	0.94
$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{\pi}{2}$	1

根據上述 $\gamma = sin^{\frac{1}{2}}\theta$，$\gamma = sin\,\theta$，$\gamma = sin^{\frac{3}{2}}\theta$，$0 \leq \theta \leq \pi$，等的圖形，我們進而考慮 $\gamma = sin^{\frac{n}{2}}\theta$，$n \in N$，$0 \leq \theta \leq \pi$，的圖形。

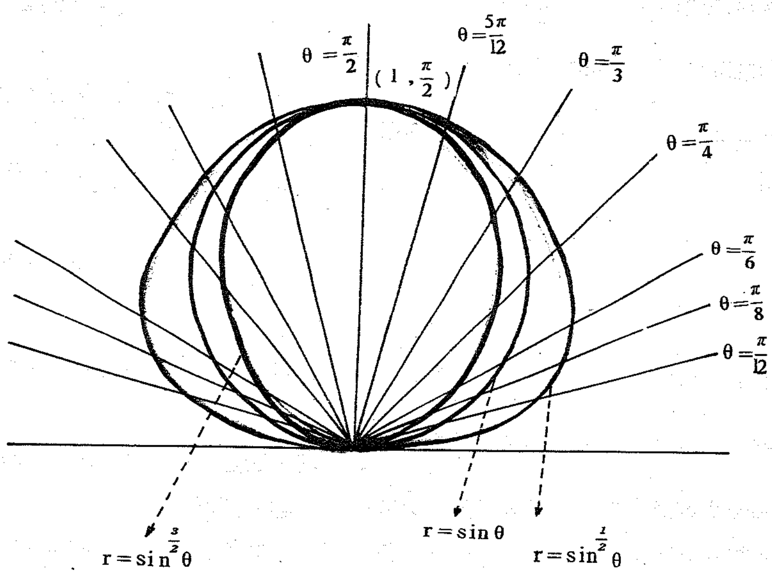
對於每一個 $n \in N$，$\gamma = sin^{\frac{n}{2}}\theta$，$0 \leq \theta \leq \pi$，的圖形是一個封閉曲線，只是當 n 值愈大時，繪出來的圖形變得更為尖細橢長，而所圍的面積也愈來愈小。

由於 $\gamma = sin^{\frac{1}{2}}\theta$，$0 \leq \theta \leq \pi$，的圖形好似一枚熟透的蟠桃，因之定其名叫蟠桃線（fairy peach curve）。今更廣之，將極方程式 $\gamma = sin^{\frac{n}{2}}\theta$，$0 \leq \theta \leq \pi$，之圖形也稱為蟠桃線。其中 $\gamma = sin^{\frac{1}{2}}\theta$，$0 \leq \theta \leq \pi$，的圖形代表蟠桃線成熟型；其他隨 n 值增大，$\gamma = sin^{\frac{n}{2}}\theta$，$0 \leq \theta \leq \pi$，的圖形面積愈小，表示猶未成熟的蟠桃線苞型。故 $\gamma = sin^{\frac{n}{2}}\theta$，$0 \leq \theta \leq \pi$，之圖形稱為蟠桃線第（$n-1$）類苞型。

下面讓我們討論蟠桃線所圍之面積，$\gamma = sin^{\frac{n}{2}}\theta$，$0 \leq \theta \leq \pi$ 的面積為：設 $n > 1$，

$$A_n = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} sin^n\,\theta\,d\,\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n\theta d\theta$$

$$= \frac{(n-1)(n-3)\cdots(2\text{或}1)}{n(n-2)\cdots(3\text{或}2)} \times c$$



（圖1）

其中，n 爲奇數時，$c=1$；而 n 爲偶數時，$c=\frac{\pi}{2}$ 。此式稱爲Wallis公式，其證明如下：因爲

$$\int sin^n\theta d\theta=-\frac{1}{n}sin^{n-1}\theta cos\theta+\frac{n-1}{n}\int sin^{n-2}\theta d\theta,$$

$$A_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^n\theta d\theta=\frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^{n-2}\theta d\theta=\frac{n-1}{n}A_{n-2},$$

故知，當 n 爲奇數且 $n>1$ 時，

$$A_n=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{2}{3}\cdot A_1=\frac{(n-1)(n-3)\cdots\cdots 2}{n(n-2)\cdots\cdots 3}。$$

當 n 爲偶數時，

$$A_n=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{3}{4}\cdot A_2=\frac{(n-1)(n-3)\cdots\cdots 1}{n(n-2)\cdots\cdots 2}\cdot\frac{\pi}{2}。$$

其次，由圖1的觀察可知，當 n 之值增大時，蟠桃線 $\gamma=sin^{\frac{n}{2}}\theta$，$0\leq\theta\leq\pi$，之圖形愈爲尖細。關於這一點，我們還可以更進一步地以面積來說明：因爲 $A_n=\frac{n-1}{n}A_{n-2}$，所以，

(1) $A_1>A_3>A_5>\cdots\cdots>A_{2m-1}>\cdots\cdots$。

(2) $A_2>A_4>A_6>\cdots\cdots>A_{2m}>\cdots\cdots$。

由於上面的兩個數列都是有界的遞減數列，因此，$\{A_{2m-1}\}_{m=1}^{\infty}$ 與 $\{A_{2m}\}_{m=1}^{\infty}$ 這兩個數列都是收斂數列。因爲

$$A_{2m-1}A_{2m}=\frac{1}{2m},$$

於是，$(\lim_{m\to\infty}A_{2m-1})(\lim_{m\to\infty}A_{2m})=0$。亦即，$\lim_{m\to\infty}A_{2m-1}$ 與 $\lim_{m\to\infty}A_{2m}$ 中至少有一個等於0。但因

$$A_{2m+1}>\frac{2}{\pi}A_{2m},\quad \frac{4}{\pi}A_{2m}\geq A_{2m-1},$$

因此，可知

$$\lim_{m\to\infty}A_{2m-1}=\lim_{m\to\infty}A_m=0。$$

也就是說，

$$\lim_{n\to\infty}A_n=0。$$

另外，我們可考慮 $\gamma^2=a^2sin^n\theta$，$0\leq\theta\leq\pi$，之圖形，其中 $a>0$。此圖形其實是 $\gamma=a\,sin^{\frac{n}{2}}\theta$，$0\leq\theta\leq\pi$，與 $\gamma=-a\,sin^{\frac{n}{2}}\theta$，兩個圖形所組成。此二圖形都是蟠桃線，不過，一個在極軸上方，一個在極軸下方，兩者只接觸在極0上。所以，我們把 $\gamma^2=a^2sin^n\theta$，$0\leq\theta\leq\pi$，之圖形稱爲連蒂蟠桃線（contacting fairy peach curve）。當 $n=1$ 時，稱爲連蒂蟠桃線原型（成熟型），當 $n>2$ 時，稱爲連蒂蟠桃線第 $n-1$ 類苞型（未成熟型）。

參考資料

1. 微積分學，胡鳴天譯，大中國圖書公司印行
2. *Calculus and analytic geometry*, Tierney，1969。
3. *Calculus with analytic geometry*，R. E. Johnson，1969。