黃金分割

國立台灣師範大學數學系　趙文敏

一、引言

本文的目的，是要介紹一些與黃金分割有關的幾何問題，同時說明如何以直尺圓規作正五邊形。

現行的國中數學課本中，提到我國古代正五邊形的近似作法，所謂的「九五頂五九，八五分兩邊」；部分學生也許會提出正五邊形的作圖法爲何，本文所介紹的是一種〝純幾何式的〞方法，可以提供給這些學生。

二、黃金分割點與黃金分割數

設$\overline{AB}$爲一線段，而C爲$\overline{AB}$上的一點，若

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}},$$

則稱C點將線段$\overline{AB}$黃金分割，或稱C爲$\overline{AB}$的一個黃金分割點，而上述的比值稱爲黃金分割數，以α表之。

問題 1：黃金分割數α等於多少？

解：因爲$\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{CB}$，而$\overline{AC}=\alpha\cdot\overline{CB}$，於是，由上述的等式，可得

$$1+\frac{1}{\alpha}=\alpha,$$

由此可求得，$\alpha=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$，但因$\alpha$是個正數，故$\alpha=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$，也就是說，黃金分割數爲$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$。

問題 2：黃金分割點如何求出？

解：設$\overline{AB}$爲一線段，過B作一線段$\overline{BD}$，使得$\overline{BD}$與$\overline{AB}$垂直而且$\overline{AB}=2\overline{BD}$。其次，在線段$\overline{AD}$上取一點$E$，使得$\overline{DE}=\overline{DB}$。最後，在線段$\overline{AB}$取一點$C$，使得$\overline{AC}=\overline{AE}$，則$C$點就是線段$\overline{AB}$的黃金分割點。

證明：圖 1 中，$\triangle ABD$是一個直角三角形而$\overline{AB}=2\overline{BD}$，根據畢氏定理，$\overline{AD}=\sqrt{5}\,\overline{BD}$，

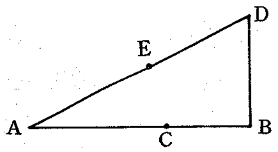

圖 1

於是，

$$\overline{AC}=(\sqrt{5}-1)\overline{BD}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overline{AB},$$

$$\overline{CB}=\overline{AB}-\overline{AC}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\overline{AB}$$

$$=\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}\overline{AC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overline{AC}。$$

由此可得，$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$，即$C$是$\overline{AB}$的黃金分割點。

三、正五邊形的作圖

問題 3：設$\overline{OA}$爲圓O的一個半徑，試作一個正五邊形$ABCDE$。

解：設F爲線段$\overline{OA}$的黃金分割點，即$\overline{OA}=\alpha\cdot\overline{OF}$。在圓$O$上取一點$G$，使得$\overline{AG}=\overline{OF}$。最後，在圓$O$上取一點$B$，使得$\overline{GB}=\overline{OF}$而$A\neq B$，則$\overline{AB}$爲所求正五邊形的一個邊。

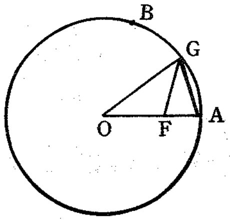

圖 2

證明：我們只需證明$\angle GOA = 36^\circ$ 即可。因爲$\overline{OF} = \overline{GA}$，在$\triangle AOG$中，

$$\frac{\overline{OG}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{OF}}{\overline{FA}},$$

於是，$\overrightarrow{GF}$是$\angle OGA$ 的分角線。其次，$\triangle AOG$及$\triangle AGF$中，$\angle A = \angle A$，

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{GA}} = \frac{\overline{GA}}{\overline{FA}},$$

故$\triangle AOG$與$\triangle AGF$相似，於是，$\overline{GF} = \overline{GA} = \overline{OF}$，即$\triangle FOG$ 是一個等腰三角形。故$\angle OAG = \angle OGA = 2\angle AOG$，因此可知，$\angle AOG = 36^\circ$，於是，$\angle AOB = 72^\circ$ 。

四、黃金矩形

設$ABCD$爲一矩形，若自其中移去一個正方形$AEFD$ 後，剩下的矩形$BCFE$ 之邊長的比與矩形$ABCD$之邊長的比相等，則矩形$ABCD$稱爲黃金矩形。

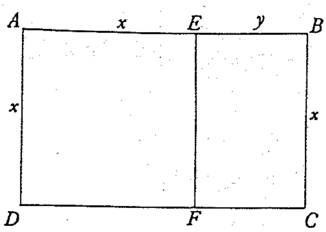

圖 3

我們可以證明：黃金矩形中，長邊與短邊長的比就是黃金分割數α。因爲，於圖 3 中，

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y},$$

$$1 + \frac{y}{x} = \frac{x}{y},$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} - 1 = 0$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \alpha。$$

黃金矩形的比例經常在古希臘的藝術及建築上出現，德國心理學家G. Fechner (1801-1887) 及W. Wundt (1832-1920)在一連串的心理測驗中證明，大部分的人在選擇圖片、卡片、鏡子、包裹及其他矩形的物品時，經常不自覺地選擇這種〝黃金尺寸〞，也就是說，就一些心理學家所不全了解的理由，這種黃金矩形有很大的吸引力。

五、黃金螺線

設$ABDF$爲一黃金矩形，將正方形$ABCH$移去後，剩下來的矩形$CDFH$ 也是一個黃金矩形。再從$CDFH$中移去一個正方形$CDEJ$，則剩下來的矩形$EFHJ$ 也是一個黃金矩形。如此繼續行之，可得許多黃金矩形。由此種方法所得的全部黃金矩形的第一個頂點即A，C，E，I，……等等都會落在某個螺線上，這個螺線稱爲黃金螺線 。

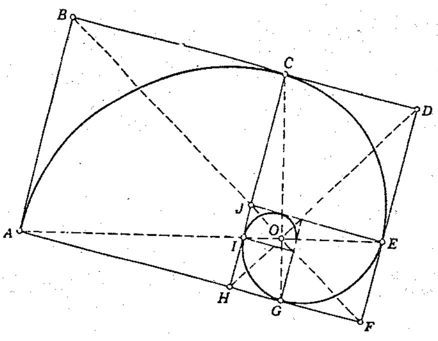

圖 4

首先，讓我們證明：$ABDF$的對角線$\overline{BF}$必定包含J點。假設$\overline{BF}$與$\overline{CH}$ 相交於一點S，因爲$\overline{SH}$與$\overline{AB}$平行，故$\overline{BS} = \alpha\overline{SF}$；又因

$\triangle BCS$與$\triangle FHS$相似，故$\overline{CS}=\alpha\overline{SH}$，也就是說，$S$是$\overline{CH}$的黃金分割點，即$S=J$，故$\overline{BF}$包含$J$點。

同理，黃金矩形$CDFH$的對角線$\overline{DH}$與$\overline{EJ}$的交點，就是第四個黃金矩形的一個頂點，此頂點與G，H，J構成的四邊形就是第四個黃金矩形。

設$\overline{BF}$與$\overline{DH}$相交於O點，則$\overline{BO}=\alpha^2\cdot\overline{OF}$。因爲

$$\frac{\overline{BO}}{\overline{OF}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{FH}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{DF}}\times\frac{\overline{DF}}{\overline{FH}}=\alpha^2,$$

於是，

$$\overline{BO}=\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}\cdot\overline{BF}=\frac{\alpha^2}{\sqrt{1+\alpha^2}}\cdot\overline{AB}。$$

同理，

$$\overline{DO}=\frac{\alpha^2}{\sqrt{1+\alpha^2}}\cdot\overline{CD}=\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\cdot\overline{AB}。$$

由此可知，

$$\overline{BO}^2+\overline{DO}^2=\alpha^2\cdot\overline{AB}^2=\overline{BD}^2,$$

因此，線段$\overline{BF}$與$\overline{DH}$垂直。

其次，我們要證明：$\overline{AE}$包含O點（同理，$\overline{CG}$包含O點）。設$\overline{AE}$與$\overline{BF}$相交於T，則

$$\frac{\overline{BT}}{\overline{TF}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}\times\frac{\overline{CD}}{\overline{EF}}=\alpha^2,$$

故$O=T$，即$\overline{AE}$包含O點。

因爲$\triangle ABO$與$\triangle CDO$相似，故$\angle AOB=\angle COD$。又因爲$\overline{BF}$與$\overline{DH}$垂直，於是，$\overline{AE}$與$\overline{CG}$垂直。

最後，因爲$\angle HAO=\angle JCO$，$\angle AOH=\angle COJ$，故$\triangle AOH$與$\triangle COJ$相似，於是，

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{CO}}=\frac{\overline{AH}}{\overline{CJ}}=\frac{\overline{DF}}{\overline{DE}}=\alpha。$$

現在，我們以$\overrightarrow{OE}$爲極軸，O爲極，定義一個極坐標系，若A的極坐標爲（a，π），則C的極坐標爲（$\frac{a}{\alpha}$，$\frac{\pi}{2}$），E的極坐標爲（$\frac{a}{\alpha^2}$,0），G的極坐標爲（$\frac{a}{\alpha^3}$，$-\frac{\pi}{2}$），I的極坐標爲（$\frac{a}{\alpha^4}$，$-\pi$）。如此可知，這些黃金矩形的第一個頂點A，C，E，G，I，……等都落在下面這個螺線上：

$$r=\frac{a}{\alpha^2}\left(\alpha^{\frac{2}{\pi}}\right)^{\theta}$$

這就是我們所說的黃金螺線。

六、黃金三角形

在圖 3 中，如果我們從黃金矩形$ABCD$中移去〝相似的〞矩形$BCFE$，則剩下的四邊形$AEFD$與原黃金矩形$ABCD$，兩者的面積有下述的關係：

$ABCD$的面積$=\alpha\times AEFD$的面積。

利用這種方法，我們定義黃金三角形如下：設$\triangle ABC$爲一三角形，若我們可從$\triangle ABC$中移去一個與$\triangle ABC$相似的三角形，使得$\triangle ABC$之面積與剩下的三角形之面積的比值爲α，則$\triangle ABC$稱爲一個黃金三角形。

問題 4：一個三角形是黃金三角形的充要條件爲何？

解：在討論這個充要條件之前，應該先了解一件事實：將一個三角形移去一個小三角形後，若剩下的圖形仍是一個三角形，則被移去的小三角形與原三角形必定有一公共邊。

設$\triangle ABC$爲一黃金三角形，並設$\overline{BC}$爲被移出之相似三角形的一邊。因爲被移去的相似三角形之面積爲$\triangle ABC$之面積的$1-\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\alpha^2}$倍，因此，$\overline{BC}=\frac{1}{\alpha}\cdot\overline{AB}$或$\overline{BC}=\frac{1}{\alpha}\cdot\overline{AC}$。換言之，若$\triangle ABC$爲一黃金三角形，則其三邊長中，

必有一邊之長爲另一邊之長的α倍。

反之，設$\triangle ABC$中，$\overline{AB}=\alpha\cdot\overline{BC}$，則$\angle C$比$\angle A$大，在$\overline{AB}$上取一點$D$，使得$\angle BCD=\angle A$，則$\triangle ABC$與$\triangle CBD$相似，而且$\overline{AB}$與$\overline{BC}$爲對應邊，因爲$\overline{AB}=\alpha\cdot\overline{BC}$，故$\triangle ABC$之面積爲$\triangle BCD$之面積的$\alpha^2$倍，於是，$\triangle ABC$之面積爲$\triangle ACD$之面積的$\alpha$倍，卽$\triangle ABC$爲一黃金三角形。

問題5.：若一直角三角形爲黃金三角形，則其三邊長之比爲何？

解：設一直角三角形爲黃金三角形，則依問題4.之解答，可分成下列兩種情形：

(1)斜邊長是某一直角邊長的α倍，則其三邊長之比爲$\alpha:\sqrt{\alpha}:1$。

(2)一直角邊之長爲另一直角邊之長的α倍，則其三邊長之比爲$\sqrt{1+\alpha^2}:\alpha:1$。

問題6.：若一等腰三角形爲黃金三角形，則其三角之度數爲何？

解：設一等腰三角形爲黃金三角形，則依問題4.之解答，可分成下列兩種情形，

(1)腰之長爲底之長的α倍，則

$$\sin\left(\frac{1}{2}\times\text{頂角之度數}\right)=\frac{1}{2\alpha}=\frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

因此，頂角爲36°，底角各爲72°。

(2)底之長爲腰之長的α倍，則

$$\sin\left(\frac{1}{2}\times\text{頂角之度數}\right)=\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{4},$$

因此，頂角爲108°，底角各爲36°。

七、另一個問題

我們知道，當兩個三角形全等時，它們的六個要素(三角及三邊)之度量必相等。現在，我們提出一個問題如下：

問題7.：有沒有兩個三角形，它們的六個要素中有五個的度量相等，但第六個不相等？

解：由於第六個要素的度量不等，可知這兩個三角形不是全等三角形，因此，度量相等的五個要素必是兩個邊與三個角。於是，這兩個三角形必是相似三角形。

設較小的三角形之三邊長爲a，b，c，且$a<b<c$，則必存在一個數r，$r>1$，使得另一三角形的三邊長爲ra，rb，rc。因爲有兩組對應邊長度相等，可知

$$b=ra,\quad c=rb=r^2a。$$

也就是說，其中一三角形之三邊長爲a，ra，r^2a，而另一個三角形的三邊長爲ra，r^2a，r^3a。不過，r的值並不是漫無限制的，因爲

$$a+ra>r^2a,$$

於是，$r^2-r-1<0$。因此，在$r>1$的假設之下，我們得出r的範圍爲

$$1<r<\frac{\sqrt{5}+1}{2}。$$

因此，對任意正數a及r，$\alpha>r>1$，以a，ra，r^2a爲三邊長的三角形，及以ra，r^2a，r^3a爲三邊長的三角形，必有五個要素的度量相等，但第六個不等。

例如，$a=8$，$r=\frac{3}{2}$時，這兩個三角形的三邊長分別爲8，12，18，以及12，18，27。

問題8.：若兩個直角三角形具有問題7.所提的性質，則其邊長的比例爲何？

解：若兩個直角三角形具有問題7.所提的性質，則必有二正數a及r，$1<r<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，使得其三邊長分別爲a，ra，r^2a，以及ra，r^2a，r^3a，又因它們是直角三角形，所以，

$$1+r^2=r^4,$$

也就是說，$r=\sqrt{\alpha}$。因此，具有問題7.所提之性質的直角三角形都是黃金三角形。