物理教學實驗數據處理上的幾個基本認識

國立台灣師範大學物理系
張秋男

一般教學上的實驗，總是將實驗的目的，所需的儀器，它們的安排以及實驗的詳細步驟都敍述得清清楚楚，甚至於有些討論事項亦加以明列。這樣的安排，主要的是希望學生能於極有限的時間（二小時到三小時間），重覆前人熟知的實驗，觀察其現象及討論所得數據，以補助課堂之所學，加強其學習效果。當然，在實驗的操作過程中，學生亦可體會到研究及探討事理的方法、態度及精神等等。但此等實驗的情況，從小學、國中、高中到大學都一再的被重覆，容易使學生養成一種以爲實驗只是用來驗證理論的手段而已。因爲每當實驗結果與標準值或理論值不相同時，立刻地，便認爲實驗的安排或測示儀器本身有問題，久而久之，「理論是對的」的觀念便在無形之中養成了。

爲了使學生不會從實驗中得到上述偏差的概念，我們將實驗上經常碰到的一些常用名稱及分析實驗數據的基本方法，例如標準值與眞實值、誤差、精密度與準確度，實驗值決定的依據，誤差的傳遞等等加以逐條說明清楚。

一、標準值與眞實值

實驗時，我們測量一物理量，所希望得到是該物理量確確實實是多少，亦即在求得該物理量的「眞實值」。例如測量一桌邊的邊長，邊長多少已存在那兒，絕不會因爲測量的關係而有所變更，這是該桌邊邊長的「眞實值」；其他如地表的重力加速度、光速、基本電荷、電子的靜止質量等等都有固定的物理量，必需透過實驗的測量來求得。但在求取這些物理量時，所用的儀器、實驗安排及實驗的環境等等都會影響到測量的結果，多少都會有些「誤差」。但一些常用的基本物理量，如上述提到的地表的重力加速度、光速、基本電荷等等，世界上各地的科學家，運用各種不同的方法，求得他自認爲最好的值，這樣經年累月的研究測量，最後測量的數據已相當豐富，大家利用科學的方法，得到某個值公認它是「最接近」於該物理量的「眞實值」，這個值就是我們一般所稱的「標準值」。這些值一般都收集在物理或化學的資料手册（Handbook）之中，可以供從事科學研究的人或工程設計的人參考之用。

當然，標準值是有時代性的，會隨着科學及科學技術的進展而有所改變，大抵說來是其精密的程度提高了，故「資料手册」內的資料亦會隨出版年份的不同而略有差異。例如1883年麥克森（Michelson）利用旋轉鏡所得到光速爲（299853 ± 60）公里／秒，而在1973年，美國科學家利用雷射及銫標準鐘得到的值爲299792.4574 ± 0.0012公里／秒。

有時，標準值往往與「理論值」混合使用，這在基本上是與標準值的認定具有同一精神，例如一單擺在振幅很小時的週期，其「理論值」爲 $2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$，$\ell$ 爲擺的長度，而 g 爲當地的重力加速度；這個值，經過許多的科學家作實驗加以認定。但是由於科技的進展，我們知道單擺的週期事實上是與振幅有關的。假如 θ 角爲單擺在振幅時，擺懸線與鉛垂線的夾角，則單擺的週期應爲 $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1+\frac{1}{16}\theta^2+\cdots\right)$。這些理論值都是經過一系列理論的假設及物理的定律加以推演而得，若所得理論值與實驗所得一致，則理論的正確性被認定——亦即理論值被認定了，便可以做爲以後實驗的參考，亦可視爲「標準值」。

故可以給「標準值」下個定義：公認爲最接近眞實值的物理值。

一般說來，標準值的精密及準確的程度，都比我們教學實驗上所能測得的要高許多，故在教學實驗室裏，便往往以標準值來估量實驗室裏測量值的「好壞」，以判定其「誤差」。這樣判定的誤差，其百分率我們通稱之爲百分誤差。即

$$\text{百分誤差} = \frac{\text{實驗值} - \text{標準值}}{\text{標準值}} \times 100\% \quad (1)$$

有了以上的認識，我們不難想見，爲什麼每當實驗值與標準值（或理論值）相左時，便可認定實驗安排或測示儀器本身有問題了。不過我們要特別强調的是標準值（或理論值）是經過實驗認定的值。也就是說眞正實驗測量的意圖是在測得物理量的「眞實值」。在談到如何從數據中來決定「眞實值」之前，先讓我們來瞭解什麼是誤差，它與精密度與準確度之間的關係又如何？

二、誤差、精密度與準確度

在第一節中，我們提到大家所熟知的百分誤差的眞正意義。式(1)中，「標準值」是最接近「眞實值」的實驗值，故嚴格地說，誤差是指實驗值與眞實值之間的差誤。實驗值的決定，通常是經過多次測量而得。如果我們對一物理量作多次的測量，我們會發現每次測量的結果均不盡相同，且與眞實值間有一差值，這個差值我們稱之爲「偏差」（Deviation）。假如 μ 是一物理量的眞實值，而 x_i 爲第 i 次，對該物理量的測量值，則第 i 次測量的「偏差」爲

$$d_i = x_i - \mu$$

其平均值爲

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)}{N} \quad (2)$$

其中 N 爲測量的總次數。

因爲每次測量的偏差有正也有負，其正負的分佈是隨機（Random）的，故常是接近於零或等於零的值，不能夠拿來表示 N 次測量值與眞實值的差異情形，亦即不能表示 N 次測量值分佈的集中或分散情形。

爲了免除以上的缺點及統計運算上的方便，我們先將每次測量的偏差予以平方，再求其平均值，即

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2}{N} \quad (3)$$

而 $S=\sqrt{S^2}$ 則稱爲「樣品標準偏差」（Sample standard deviation）[註]，可以用來表示 N 次測量值與眞實值的差異情形。例如我們如對一圓筒的直徑做測量，開始時手邊沒有游標尺，只有一刻度到一毫米的米尺可以應用，10 次測量的結果列於表一(a)，其分佈如圖一(a)，圖中 f 爲測量值出現的次數；以後得到游標尺，再做 10次的測量，其結果列於表一(b)，其分佈如圖一(b)。

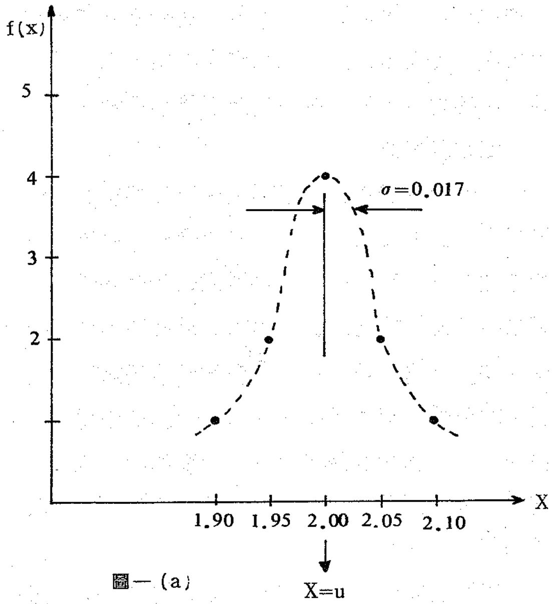
圖一(a)的資料分佈比圖一(b)的要分散。假設已知圓筒的眞正直徑爲 2 公分，則表一(a)資料所得的標準偏差 $S_a = 0.017$；而表一(b)的 $S_b = 0.0035$，S_a 顯然要比 S_b 大。

表一(a)

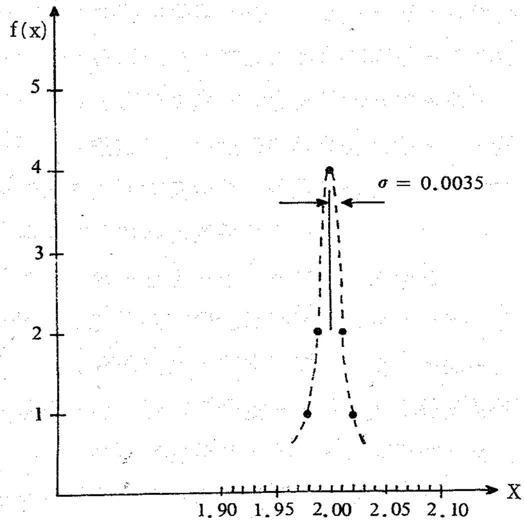
測量次數	測量值（公分）
1	2.00
2	2.05
3	1.95
4	1.90
5	2.05
6	2.00
7	1.95
8	2.00
9	2.00
10	2.10

表一(b)

測量次數	測量值（公分）
1	2.00
2	2.01
3	1.99
4	2.00
5	1.98
6	2.00
7	2.01
8	1.99
9	2.00
10	2.02



圖一 (a)



圖一 (b)

【註】：「標準偏差」前所以冠以「樣品」兩字，是因爲 N 次的測量只是無限次測量之中的「樣品」測量，任何物理量，如其眞實值，標準偏差等等，預求其準確值，原理上均需經過無限次的測量才可以決定，即

$$\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N} x_i / N \qquad (4)$$

$$\sigma^2 \equiv \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2}{N} \tag{5}$$

(5)式中的 σ 就稱為「標準偏差」(Standard deviation)。因為無限次的測量，在實際上是行不通的，故我們均以有限次的測量值來加以分析，故有所謂的樣品值。

的確地，在資料分析上，我們是以 S 來測量所有測量值（對同一物理量而言）與眞實值的差異情況，S 比較小表示所有的測量值比較集中在眞實值的周圍，反之則比較分散。故由一組具有較小 S 值的測量值所決定出來的實驗值，其精密度比較高。上述的例子裏，由於資料都分佈在眞實值的周圍，實驗值的精密度比較高同時也表示準確度比較高。現在再以一比較具體的例子來說明精密度與準確度。在射擊時，靶的圓心是為一眞實值，假設一支槍，按瞄準要領發射，其彈着點都在圓心的周圍且在靶的中心黑點內，好的槍，其彈着的分佈範圍比壞的槍要來的小（亦即 S 較小），故好的槍其精密度高，但因兩支槍都能使彈着落於中心黑點內，故兩支槍都是準確的槍，此時精密度高的槍，其準確度自然要高。但是一般而言精密度高的槍並不一定意味着它的準確度一定高，例如精密度高的槍，因為使用人習慣上的偏差，在未做校正之前，其彈着點的分佈範圍雖然很小，但却不一定分佈在靶圓心的周圍，甚至會在黑點範圍之外，其準確度便差了。

故準確度是表示實驗值與眞實值的相差程度，即我們習稱的「實驗誤差」(Experimental error)。實驗誤差有兩種來源：一稱為系統誤差，一稱為統計誤差。玆分別加以說明。

(1)系統誤差：

系統誤差是指由於測量者、儀器及實驗環境的影響，使實驗值偏離眞實值而形成的誤差。例如利用米尺測量一桌邊邊長，在讀取測量值時，眼睛並未與米尺在同一水平及垂直於米尺，本來是 20.0 公分的長度，可能測得的是 21.0 公分，九 測量值不在 20.0 公分的周圍形成分佈而是在 21.0 公分的周圍形成分佈。又如一用久的游標尺，可能零點已不對，在測量時未加以校正，故所得的實驗值與眞實值之間便要差一固定的數量，這樣引起的誤差亦為系統誤差的一種。再如在做精密長度測量時，未考慮到物體因溫度漲縮的特性，也會使實驗值與眞實值之間有差，而引起系統誤差。由以上的簡單例子，我們可以看出系統誤差都是可以加以修正的。只要實驗時，處處小心，考慮周全，記錄下實驗當時所有安排情況，及環境狀況（如溫度、氣壓、眞空度等等），通常可以使系統誤差減至最小程度。

(2)統計誤差：

不管怎樣精密的儀器，由於自然統計步驟的存在，都會使測量值形成一個分佈。精密度高的儀器其分佈範圍較小，其導致的統計誤差小，反之則較大。故統計誤差與前面提過的「樣品標準偏差」S 有直接的關係。我們已經提過，精密度高的儀器所得到 S 要比精密度低的要來得小，但對同一精密度的儀器而言，測量的次數愈多，統計誤差可以愈小。這一點，等我們討論過「誤差的傳遞」之後，再來說明。

在實驗資料的分析上，因為系統誤差是可以加修正的，對一有經驗及有技術的實驗者而言，很容易的可以估計出其大小來。故一般講資料分析都着重在統計誤差方面，這方面涉及到統計的種類及其理論，不是光憑實驗技術及經驗可以加以確定的。當系統誤差及統計誤差決定以後，我們就可以估量實驗值的可能誤差（ Probable error ）了 。任何一個實驗值均應有可能誤差

，因爲實驗值不可能絕對的準確，亦卽實驗值不可能百分之百的表示眞實值。實驗值的可能誤差是表示實驗者對他所得的測量結果，經過分析後，給予認可的準確程度。例如當他測一圓筒的直徑所得結果是2.0±0.1公分時，表示以他手邊有的儀器，經過測量分析後，他斷定圓筒的直徑是2.0公分，但其可能誤差是0.1公分，卽表示圓筒的眞正直徑（眞實值）存在於1.9到2.1公分之間。如果另外一個人，用較精密的儀器來測量該圓筒的直徑，得到1.95±0.05公分，卽他判定的圓筒直徑爲1.95公分，但具有0.05公分的誤差，亦卽圓筒的眞正直徑在1.9到2.0公分之間。這兩個結果並不相互衝突，只是後一結果的準確度較高，將眞實值可能存在範圍縮得更小了。

誤差的估量在物理學上非常重要。例如在做動量不滅的實驗裏，若兩物體在碰撞前的動量測得爲8.0±0.3仟克－米／秒，而碰撞後的動量測得爲8.1±0.5仟克－米／秒，則我們可以下結論說：在實驗誤差範圍內，兩物體碰撞前與碰撞後的動量相等。若不估計或不標明實驗值的誤差，則顯然的8.0≠8.1，動量不滅的結論便下不得。

三、誤差的傳遞

有時一個物理量不能由直接的測量而得，好像一物體的密度，必須測得其體積及其質量才可求得；又如一長方形物體的體積可由長、寬、高的測量而求得等等。每測量一個量，均有其可能誤差（Probable error），如何由這些誤差來決定最終物理量的可能誤差是這一節的主題。

在探求其一般方法之前，讓我們先看看一個簡單的例子——長方形體積的測量。設若此長方體長、寬、高的眞實質分別爲L_o，W_o及H_o，而其實驗值分別爲L，W及H，則顯然的，長、寬、高的誤差分別爲$\pm\triangle L = L - L_o$，$\pm\triangle W = W - W_o$及$\pm\triangle H = H - H_o$。又長方體的體積，其眞實值爲$V_o = L_oW_oH_o$，而具實驗值則爲$V = LWH$，故

$$\begin{aligned}\pm\triangle V &= LWH - L_oW_oH_o\\ &= (L_o \pm\triangle L)(W_o \pm\triangle W)(H_o \pm\triangle H) - L_oW_oH_o\\ &= L_oW_oH_o \pm W_oH_o\triangle L \pm L_oW_o\triangle H \pm L_oH_o\triangle W - L_oW_oH_o\\ &= \pm W_oH_o\triangle L \pm L_oW_o\triangle H \pm L_oH_o\triangle W\\ &= \pm\left(\frac{\partial V}{\partial L}\right)_{W_oH_o}\triangle L \pm\left(\frac{\partial V}{\partial H}\right)_{L_oW_o}\triangle H \pm\left(\frac{\partial V}{\partial W}\right)_{L_oH_o}\triangle W\end{aligned}$$

爲清楚起見，去掉誤差值所帶的±號得

$$\triangle V = \left(\frac{\partial V}{\partial L}\right)_{W_oH_o}\triangle L + \left(\frac{\partial V}{\partial W}\right)_{L_oH_o}\triangle W + \left(\frac{\partial V}{\partial H}\right)_{L_oW_o}\triangle H \qquad (6)$$

由(6)式可知，最後體積測量值的誤差是由長、寬、高的誤差分別乘上一衡量因子（Weighting factor），再相加而得。每個衡量因子的物理意義都相當淸楚，例如對$\triangle L$而言，$\left(\frac{\partial V}{\partial L}\right)_{W_oH_o}$爲體積對長度的偏微分（亦卽固定住寬爲$W_o$及高爲$H_o$，$L$有微少變化時，體積$V$的變化量），其餘$\triangle W$及$\triangle H$的衡量因子都有相似的物理意義。

若一物理量f爲u，v，w…等的函數，卽$f = f(u, v, w\cdots)$，依(6)式，若知道u的

誤差爲$\triangle u$，v的誤差爲$\triangle v$；w的誤差爲$\triangle w$…等，則f的誤差$\triangle f$應該等於

$$\frac{\partial f}{\partial u}\triangle u+\frac{\partial f}{\partial v}\triangle v+\frac{\partial f}{\partial w}\triangle w+\cdots。$$

這樣類似於(6)式的誤差傳遞法，在一般教學實驗的測量裏「或許」用得着，因爲教學實驗裏往往有標準值（可以當作是眞實值，詳見本文第一節）可以作參考，以求取實驗誤差，如上述的$\triangle u$、$\triangle v$、$\triangle w$…等等。但是物理測量的目的，就是在求取眞實值，故$\triangle u$，$\triangle v$，$\triangle w$…等，在無標準值可供參考的情況下是不存在的。即如一般長方體的長、寬、高的眞實值L_o、W_o及H_o等亦爲未知，必需經由測量而得。此時測量的誤差就只能利用測量時能代表誤差的量，如樣品標準偏差等等來求得，故講誤差的傳遞，首先應講樣品標準偏差的傳遞。但是在(3)式中的樣品標準偏差，需要眞實值μ，它在實際測量中爲一未知數，不容易從有限次的測量中來決定，故我們暫且用平均值來代替它，亦即

$$\mu\simeq\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{N}x_i}{N} \tag{7}$$

而樣品標準偏差的平方可以重新定義爲

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2}{N-1} \tag{8}$$

分母變成$N-1$，是因爲在求平均值$\bar{x}$時，理論上用去了一個測量值所提供的資料。

設若u，v等等爲可測量的量而$f=f(u, v\cdots)$。則

$$f_i=f(u_i, v_i, \cdots) \tag{9}$$
$$\bar{f}_i=f(\bar{u}, \bar{v}, \cdots) \tag{10}$$

$\bar{f}$，$\bar{u}$，$\bar{v}$等均表其相應量的平均值。將(a)式對其對應的平均值做泰勒級數展開

$$f_i=f(\bar{u}, \bar{v}, \cdots)+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)(u_i-\bar{u})+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)(v_i-\bar{v})$$

$$+(f\text{的高階尋函數})$$

$$\therefore\quad f_i-\bar{f}=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)(u_i-\bar{u})+\frac{\partial f}{\partial v}(v_i-\bar{v})+\cdots$$

故

$$S_f^2=\frac{\sum_{i=1}^{N}(f_i-\bar{f})^2}{N-1}$$
$$\cong\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N-1}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2(u_i-\bar{u})^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2(v_i-\bar{v})^2+2(u_i-\bar{u})(v_i-\bar{v})\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}+\cdots\right]$$

因爲按(8)式，

$$S_u^2=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N-1}(u_i-\bar{u})^2$$

$$S_v^2=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N-1}(v_i-\bar{v})^2$$

又設

$$S_{uv}=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N-1}(u_i-\bar{u})(v_i-\bar{v})$$

則

$$S_f^2\cong\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2S_u^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2S_v^2+2\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)S_{uv}+\cdots \tag{11}$$

一般說來，假若u與v之間無任何的相關性，即

它們各自獨立，在測量上不會互相影響，則 S_{uv} 值會因爲相加數列中各項正負相消的結果，變得非常小，假若 $n\to\infty$，S_{uv} 應趨近於零。故 (11 式中，頭兩項是最重要的項，影響 S_f^2 最大，故（11）式可改寫成爲

$$S_f^2 \cong (\frac{\partial f}{\partial u})^2 S_u^2 + (\frac{\partial f}{\partial v})^2 S_v^2 + \cdots \qquad (12)$$

（12）式即是「樣品標準偏差」的傳遞所依據的法則。

例如(1) $f = au + bv$，則

$$\sigma_f^2 = a^2\sigma_u^2 + b^2\sigma_v^2$$

(2) $f = \pm auv$，則

$$\sigma_f^2 = a^2v^2\sigma_u^2 + a^2u^2\sigma_v^2$$

故 $$\frac{\sigma_f^2}{f^2} = \frac{\sigma_u^2}{u^2} + \frac{\sigma_v^2}{v^2}$$

(3) $f = \pm a\frac{u}{v}$，則

$$\frac{\sigma_f^2}{f^2} = \frac{\sigma_u^2}{u^2} + \frac{\sigma_v^2}{v^2}$$

(4) $f = au^{\pm b}$，則

$$\frac{\sigma_f}{f} = b\frac{\sigma_u}{u}$$

(5) $f = ae^{\pm bu}$，則

$$\frac{\sigma_f}{f} = b\,\sigma_u$$

(6) $f = a\ell_n(\pm bu)$ 則

$$\sigma_f = a\frac{\sigma_u}{u}$$

四、實驗值的決定與分佈

實驗測量的目的，在求得一物理量的眞實值。但是依我們測量的經驗，我們發現，N次的測量，只給我們一個測量值的分佈，那麼如何從這些測量值，求取一個最恰當的實驗值，來代表該物理量的眞實值呢？

爲了以後說明的方便起見，我們將稱每一次的測量值爲一個資料點。假使我們能有無數個資料點，則我們應該可以得到一個資料點分佈的狀況，當然這種分佈在實驗上實際是無法得到的（因爲對一個物理量，不可能去測量無數次），但我們不妨假設自然界切切實實有這個分佈存在，而任何一次的測量值，其出現的可能率都是遵循這個分佈出現的。這個分佈就稱爲「母分佈」（Parent distribution）。

每一個分佈都有一些描述其分佈狀況的參數，如中間值，平均值，最大可能值，標準偏差等等。以下分別加以說明：

(1)中間值（median）——在一母分佈裏，大於中間值的測量值，其出現的機率與小於中間值的測量值的出現機率相等，即各佔50 %。如圖2中的 $\mu_{1/2}$ 即是中間值。

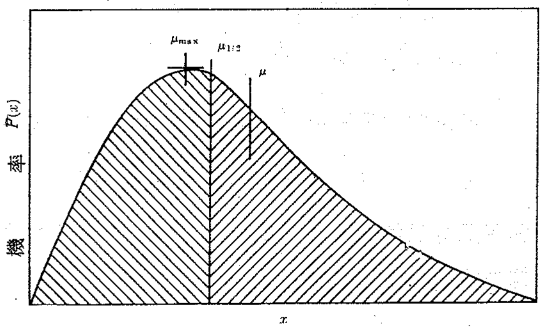


圖2　母分佈的各種參數

（左邊斜綫部份的面積與右邊斜線部份的面積相等）

亦即

$$P(x_i \geq \mu_{1/2}) = P(x_i \leq \mu_{1/2}) = 50\%$$

(2)平均值（mean）——母分佈中各測量值的平均，即

$$\mu = \sum_{i=1}^{\infty} P(x_i)\, x_i$$

亦即

$$\mu = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum x_i}{N} \quad (13$$

如圖2所示之μ值。

(3)最大可能值（Most probable value）——即在母分佈中出現機率最大的值，如圖2中的μ_{max}，亦即

$$P(x_i=\mu_{max}) \geq P(x \neq \mu_{max})$$

(4)標準偏差（Standard deviation）——在母分佈中，各測量值與平均值偏差的平方，其平均值為σ^2，即

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{\infty} P(x_i)(x_i-\mu)^2$$

或

$$\sigma^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} (x_i-\mu)^2 \quad (14)$$

σ^2的平方根σ，即稱為標準偏差。

從以上的定義，我們可以說

母分佈的參數$\equiv \lim_{N\to\infty}$（資料點分佈的參數）

當N為有限值時，資料點分佈的參數我們稱之為樣品參數。如樣品平均值為

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} P(x_i) x_i$$

或 $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} \quad (15)$$

樣品標準偏差為

$$S = \left[\sum_{i=1}^{N} P(x_i)(x_i-\mu)^2\right]^{1/2}$$

或 $$S = \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i-\bar{x})^2}{N-1}\right]^{1/2} \quad (16)$$

母分佈的中間值、平均值與最大可能值都與眞實值有同一因次，理論上都可以拿來代表物理量的眞實值，但是物理世界裏出現的分佈，大都是對稱或是非常接近對稱的，亦即中間值、平均值與最大可能值為同一個值，故我們常以母分佈的平均值來代表所測物理量的眞實值，而其不準度則正比於母分佈的標準偏差。

現在實驗值的求得變成了是用有限次數的測量值（即有限的資料點）來決定其最大可能的母分佈，而這個母分佈的平均值，即是我們所要的實驗值。利用統計學上的最大可能法（The method of maximam likelihood），我們發現，平均值等於資料點平均值的母分佈是描述資料點的最大可能的母分佈，亦即

$$\mu \simeq \bar{x} = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{N}$$

故一般都以資料點的平均值作為實驗值。

上述實驗值的求得，有一隱含的條件，即每個資料點的標準偏差都假設為一定，即$\sigma_i = \sigma \simeq S$

而 $$S^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} (x_i-\mu)^2 \simeq \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N-1} (x_i-\bar{x})^2$$

利用誤差的傳遞法，我們可以求得實驗值μ的標準偏差$\sigma_\mu \simeq S_\mu$為

$$\sigma_\mu^2 \simeq S_\mu^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial \mu}{\partial x_i}\right)^2 S_i^2$$

$$= S^2 \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial \mu}{\partial x_i}\right)^2 \quad (\because S_i = S)$$

$$\cong S^2 \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_i}\right)^2$$

$$\cong \frac{S^2}{N}$$

$$\therefore \sigma_\mu \cong S_\mu \cong \frac{S}{\sqrt{N}}$$

總結以上的討論，利用N個資料點，假若忽略系統誤差不計（即將系統誤差修正到統計誤差的範圍內），而每個資料點的標準偏差都相同，即它都可以用最大可能母分佈的標準偏差來描述，則

$$\mu \simeq \bar{x} = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{N} \qquad (17)$$

$$\sigma_\mu \simeq S_\mu = \frac{S}{\sqrt{N}} \qquad (18)$$

$\bar{x}$及S_μ 即是我們要決定的物理量的實驗值及其誤差（統計誤差）。

為了應用的方便，我們也將資料點若具有不同的標準偏差時的結果列下：

$$\mu \cong \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i / \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}} \qquad (19)$$

$$\sigma_\mu \cong \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (20)$$

上二式（19）及（20）式中的σ_i 為各資料點x_i的標準偏差，當$\sigma_i = \sigma$ 時，則（19）及（20）式就變成了（17）及（18）式。

例如測量一個標準電池兩極的電位差，實驗者開始時用一伏特計做了40 次的測量，得到其平均值為$\bar{x}_1 = 1.020$ 伏特，其樣品標準偏差為$S_1 = 0.010$ 伏特。後來有人告訴他，利用相同的伏特計，可以減少不準度的方法，他再做了10次測量，其平均值為$\bar{x}_2 = 1.018$ 伏特，而$S_2 = 0.004$ 伏特。故他第一次得到實驗值及誤差為：

$$\mu_1 \cong \bar{x}_1 = 1.020 \quad (伏特)$$

$$\sigma_{\mu_1} \cong \frac{S_1}{\sqrt{N}} = \frac{0.010}{\sqrt{40}} = 0.0016 \quad (伏特)$$

而第二次的結果為

$$\mu_2 \cong \bar{x}_2 = 1.018 \quad (伏特)$$

$$\sigma_{\mu_2} \cong \frac{S_2}{\sqrt{N}} = \frac{0.004}{\sqrt{10}} = 0.0013 \quad (伏特)$$

將兩次的實驗值聯合起來，利用（19）式及(20)式，可得

$$\mu \cong \frac{\frac{40(1.020)}{(0.01)^2} + \frac{10(1.018)}{(0.004)^2}}{\frac{40}{(0.01)^2} + \frac{10}{(0.004)^2}}$$

$$= 0.39(1.020) + 0.61(1.018)$$

$$= 1.0188 \quad (伏特)$$

$$\sigma_\mu \cong \left(\frac{40}{(0.01)^2} + \frac{10}{(0.004)^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 0.0010 \quad (伏特)$$

由以上的例子，我們發現做物理測量時的幾個要點：

1. 測量次數多固然可以減少其實驗誤差，但不如將每個資料的精密度提高。因為測量次數對最後誤差的影響只是使它減小為測量次數的平方根倍而已。

2. 資料愈多所分析得到的結果愈準確。像上例中聯合二次實驗值所得的結果比任一次實驗值的各別結果，其準確度都要比較高。

五、結語

以上只就教學實驗上常見的名稱及實驗數據處理上的基本方法加以敍述，實則實驗數據的處理有其更精深的一面，並不在本文討論範圍之內，有興趣的讀者，可參閱：

1. The Analysis of Physical Measurements，Pugh & Winslow （1966）。
2. Data Reduction and Error Analysis for the Physical Science，P.R. Bevington （1969）.

獲獎的名次小明是怎麼猜中的

勇清

某次數學競試，小明與其他四位同學得到前五名。當小明知道五位得獎同學的名字卻不知道五位同學的名次時，就去向數學老師打聽。老師靈機一動，決定考考他，就告訴小明說：「如果你有興趣，可以猜猜看，我再告訴你有沒有猜中。」於是小明就把得獎的五位同學分別用甲、乙、丙、丁、戊來表示，還很謙虛地把自已稱爲戊。

他問老師：「是不是甲乙丙丁戊？」

老師回答說：「猜得不好，不僅沒有一位同學的名次是對的，而且也沒有兩位名次前後相連的同學被你猜中。」

小明再猜：「是不是丁甲戊丙乙？」

老師讚賞地說：「這一次有進步了，不僅猜中了兩位同學的名次，而且也猜中兩對同學的前後相連關係。」

小明考慮了一會兒，就說：「正確的名次順序是：戊丁甲丙乙。」

老師點點頭，並且問他怎麼猜中的。

現在，讓我們來分析一下，小明是如何從兩次猜測及老師的回答而得知正確的順序的？

因爲在第二次所猜的丁甲戊丙乙中，有兩人的名次是對的，而且有兩對同學的前後次序也是對的。因此，在丁甲戊丙乙之順序中，名次不正確的那三位同學中最多只能有一對的前後相連關係正確。又因爲名次正確的同學與相連的名次不正確的同學間的相連關係一定不正確。由此可知，前後次序正確的兩對同學中，必有一對就是名次正確的兩位同學。因此，名次正確的兩位同學必定是在丁甲戊丙乙中相連的兩位。

更進一步地，名次不正確而前後次序正確的那一對，必須要成對地移至另外兩個相連的位置，而這兩個位置必須是名次不正確的三個位置中之二。由此可知，名次不正確的三位同學必是在丁甲戊丙乙中相連的某三位。

綜合上面兩點可知，名次正確的兩位只有兩種可能情形：丁甲或丙乙。

若名次正確的是丁甲，則另一對前後次序正確的必是戊丙或丙乙。若是前者，則正確的名次順序爲丁甲乙戊丙，但這是不可能的，因爲由第一次猜測中，已知甲乙的前後次序是不正確的。若是後者，則正確的名次順序爲丁甲丙乙戊，但這也是不可能的，因爲由第一次猜測知，丙不是第三名而且戊不是第五名。

若名次正確的是丙乙，則另一對前後次序正確的必是丁甲或甲戊。若是後者，則正確的名次順序爲甲戊丁丙乙，但這是不可能的，因爲由第一次猜測中，已知甲不是第一名。因此，另一對前後次序正確的必是丁甲。所以，這五位獲獎同學的正確名次順序必是戊丁甲丙乙。