

而 $X/\sim = \{ [a] \mid a \in X \}$

(2) 定 $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$

$$[a] \rightarrow f(a)$$

即 $\bar{f}([a]) = f(a), \forall [a] \in X/\sim$

因 $[a] = [b] (a, b \in X)$

$\Leftrightarrow a \sim b$ (由(4)中性質(c))

$\Leftrightarrow f(a) = f(b)$ (由“ $\sim$ ”之定義)

故 $\bar{f}$ 之定義完善 (即 $\bar{f}$ is well defined)

因 $\forall [a], [b] \in X/\sim,$

$\bar{f}([a]) = \bar{f}([b]) \Rightarrow f(a) = f(b)$

$$\Rightarrow [a] = [b]$$

故 $\bar{f}$ 爲一對一函數。

(3) 定 $g : X \rightarrow X/\sim$

$$a \rightarrow [a]$$

即 $g(a) = [a], \forall a \in X$

顯然 g 爲一映成函數。

(4) 因 $g : X \rightarrow X/\sim$

$$\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$$

故 $\bar{f}og$ 存在且 $\bar{f}og : X \rightarrow Y$

因 $\bar{f}og(a) = \bar{f}(g(a)) = \bar{f}([a]) = f(a), \forall a \in X$

故 $f = \bar{f}og$ (證明完成)

註一、 $\cup X/\sim$ 表 $X/\sim$ 中所有對等類的聯集

例如, 若 $X/\sim = \{[a], [b], [c]\}$

則 $\cup X/\sim = [a] \cup [b] \cup [c]$

註二、本問題取自 DAVID M. BURTON 編

著之 ABSTRACT AND LINEAR

ALGEBRA



如何平分八斤油

勇清

如果你有一桶油，共有八斤。現在想把它分成兩個四斤，可是你只有兩個油瓶，一個裝滿是五斤，另一個裝滿是三斤。只利用這些工具，你能把八斤油分成兩個四斤嗎？

下面我們提出一種方法，它共需八個步驟，當然，這個問題不一定只有一種方法：

(1) 先將小瓶裝滿，得三斤；

(2) 將小瓶中的三斤油倒入五斤瓶中；

(3) 再將油桶中的油裝滿小瓶，得三斤；

(4) 將小瓶中的油倒入五斤瓶中，將五斤瓶裝滿，則小瓶剩下一斤油；

(5) 將五斤瓶中的五斤油倒回桶中；

(6) 將小瓶中的一斤油倒入五斤瓶中；

(7) 將桶中之油倒入小瓶中裝滿，則桶中剩四斤油；

(8) 將小瓶中的三斤油倒入五斤瓶中，則五斤瓶中也是四斤油。

上面這個問題，也應用到一點數學上的道理，因為 3 與 5 互質，所以，一定有兩個正整數 m 與 n ，使得 $3m - 5n = 1$ ；在上面的方法中，我們是取 $m = 2$ 及 $n = 1$ 。

下面我們舉出一個類似的問題，讀者可做做看：有一個裝滿十斤的油桶，另外還有兩個瓶，一個裝滿是三斤，一個裝滿是七斤，現在要把十斤油分成兩個五斤，應該如何分法？

