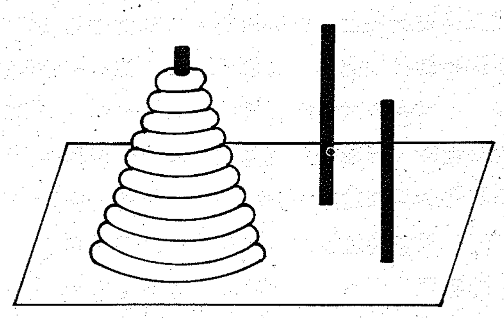
高中基礎數學實驗教材之檢討

——數學歸納法與遞迴數列——

國立台灣大學數學系 賴東昇

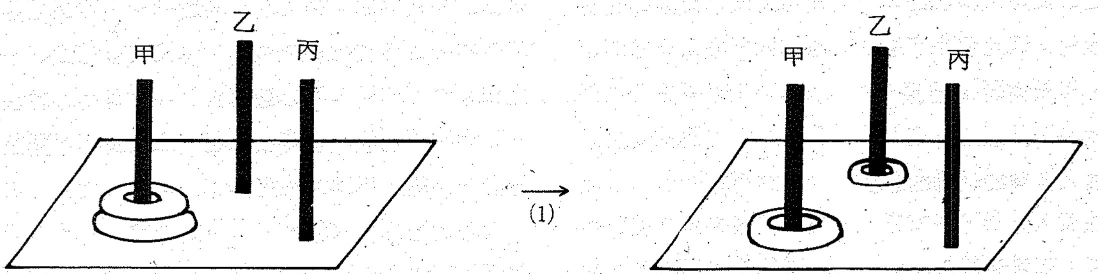
師大科教中心這兩年來一直積極地在進行高中數學及自然科學實驗教材的編輯工作。各科高一第一學期用的課本大都編完，已經在七、八月間陸陸續續地出版了。當我接到實驗教材基礎數學第一册之後，很快的瀏覽一番，當那些有趣的教材重現在眼前的時候，內心很高興，慶幸師大科教中心這幾年來推動中學數學及自然科學教育改革運動已有良好的起步了。不過話說回來，我們並沒有認爲這些實驗教材就是十全十美的。事實上，有些教材現在仔細讀起來，就會覺得當時寫得不夠好，很想把它重寫一遍，例如基礎數學第一册，第二章(數列與級數)，第三節(數學歸納法)，第89－90頁中的例4就是其中的一個。這個例題的缺點就是寫得太濃縮了一點，本文的目的就是想把這個例題改寫一下，使得人人都不必太傷腦筋就可以懂；就像將濃縮的果汁加水沖淡，使它變成人人愛飲用的潤喉的果汁。

傳說古時候在一個寺廟裡，有六十四個大小不同的銀圈與竪立在一塊木板上的三根金棒。這些銀圈套在其中一根金棒上，由大而小地疊積起來，如下圖(不過圖中只畫有十個銀圈)。

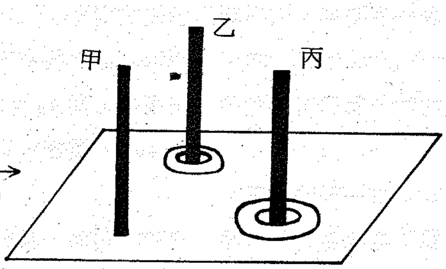


寺廟裡的和尚們嘗試着把這一堆銀圈整個搬移到另一根金棒上面去。不過他們之間有一個約束：就是說每次只能搬動一個銀圈，而且大的銀圈不能在小的銀圈上面。現在我們想來看看，到底如何搬動才能把這一堆銀圈——在他們的約束之下——搬移到另一根金棒上去。如果能搬成，我們也想知道一共需要搬動幾次才能完成。

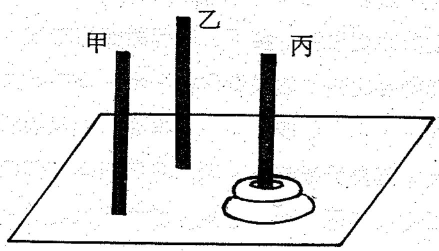
首先我們來看看如何搬動這一堆銀圈，爲了簡單起見，不妨先考慮只有兩個銀圈的情形。請大家看看下面的圖：



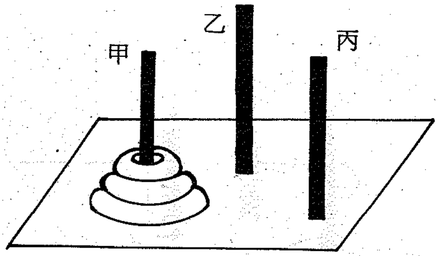
(2)



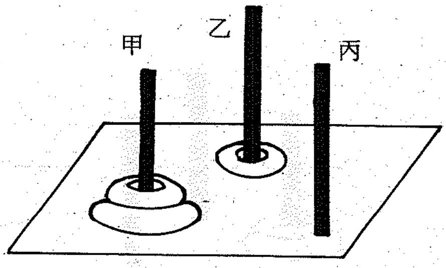
(3)



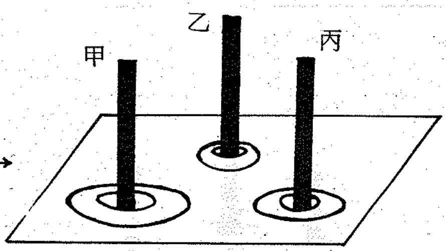
第一次把甲棒上的小銀圈搬動到乙棒上去。第二次把甲棒上的大銀圈搬移到丙棒上去。第三次把乙棒上的小銀圈搬移到丙棒上去，就算完成了。我們總共搬動三次就成功了。所以兩個銀圈的情形不難。那麼三個銀圈的情形又如何呢？我們仿照上面以圖示的方法來說明搬動的每一步驟:



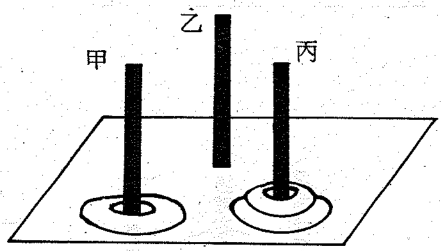
(1)



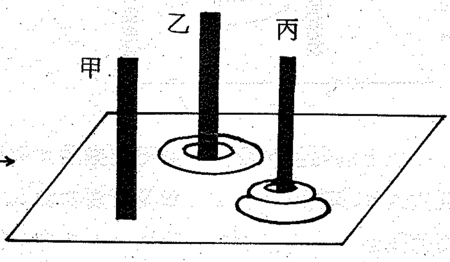
(2)



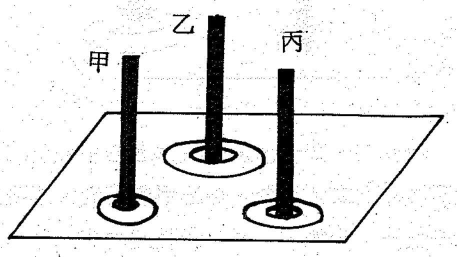
(3)



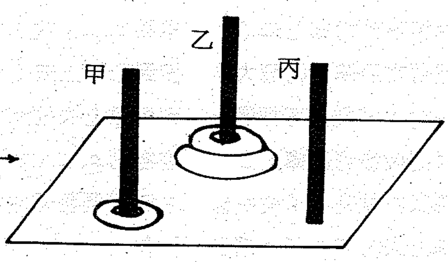
(4)



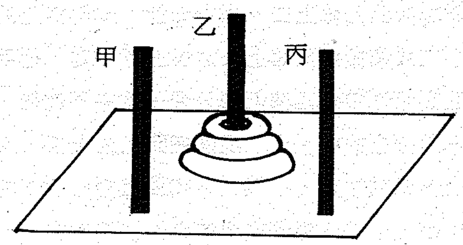
(5)



(6)

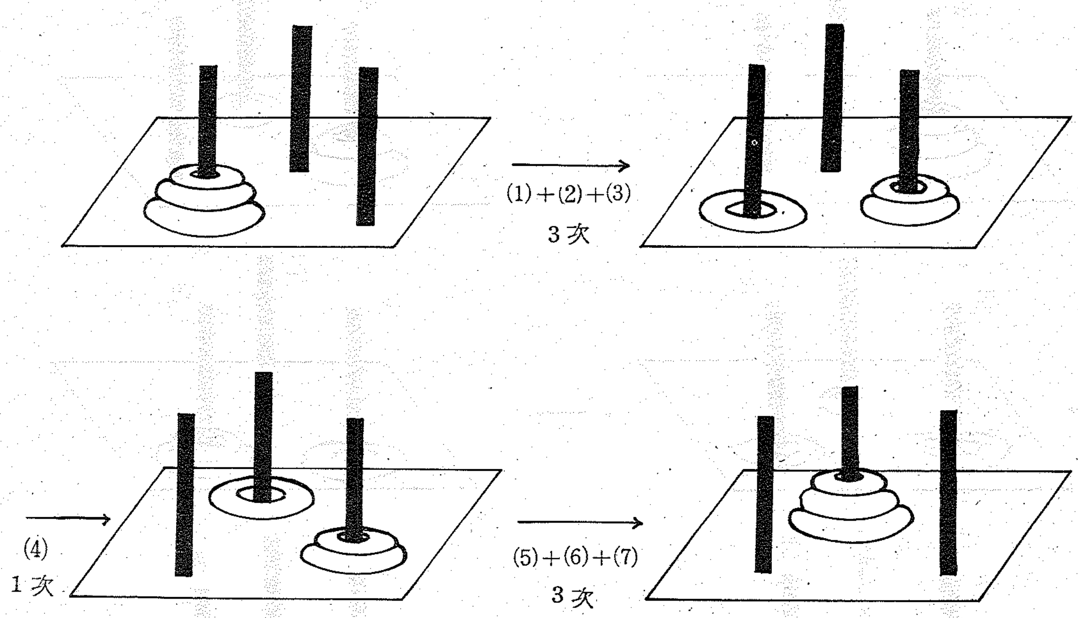


(7)



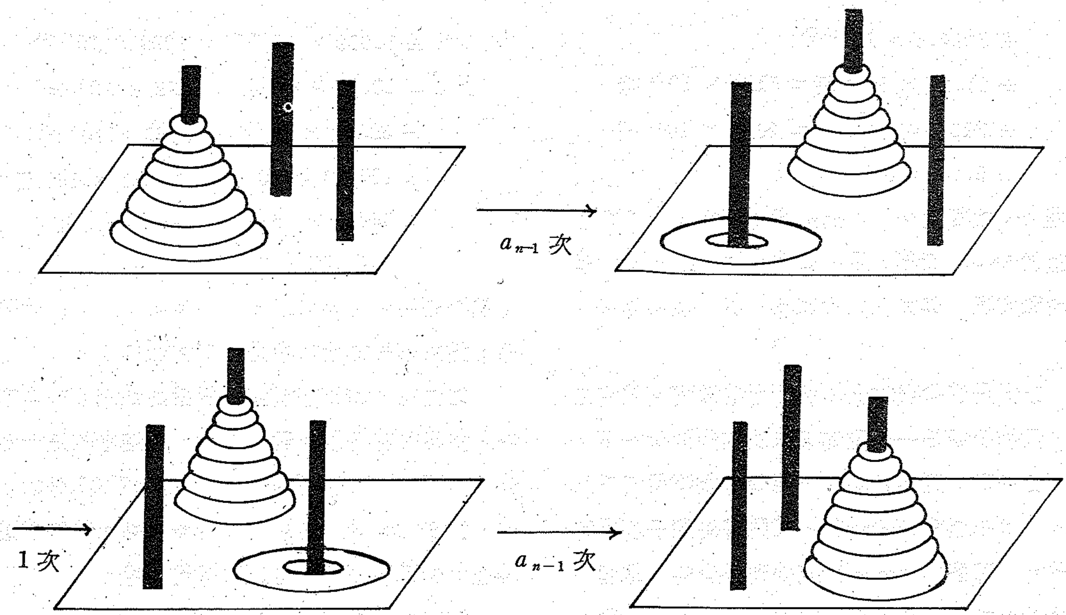
所以我們知道三個銀圈的時候，一共需要搬動七次才能做完。接下去四個銀圈的時候，又需要搬動幾次呢？如果是這樣一步一步做下去，由二而三，由三而四，而一直推到六十四的話，相信大家都會嫌煩起來。因此我們想換一個角度來看看這個問題。換句話說，我們想來討論一般有 n 個銀圈的情形。爲了能夠由簡單的情形推算出複雜的情形，我們應該弄清楚搬動 n 個銀圈與搬動 $n-1$ 個銀圈之間有什麼關係。如令 a_n 爲搬動 n 個銀圈所需要的次數，我們是想知道 a_n 與 a_{n-1} 之間有什麼關係。因爲我們已經知道 $a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=7$；如果 a_n 與 a_{n-1} 之間有某種關係的話，我們可以利用這個關係，從 $a_3=7$ 可求得 a_4，再由 a_4 可進一步求得 a_5。這樣逐步求下去就可得一般的答案 a_n 了。

爲了瞭解搬動的各個步驟間的關係，我們不妨先來仔細觀察一下搬動三個銀圈時的每一個步驟。在上圖中，如果把第一、二、三步驟拼在一起，把第五、六、七步驟拼在一起，可以得如下簡圖：



步驟(1)+(2)+(3)是把甲棒上的中、小二銀圈搬到丙棒上去，步驟(4)是把甲棒上的大銀圈搬到乙棒上去，步驟(5)+(6)+(7)是把丙棒上的中，小二銀圈搬到乙棒上去。反過來說，把甲棒上的中、小二銀圈搬到丙棒上去需要三次搬動，把甲棒上的大銀圈搬到乙棒上去只要一次搬動就夠，然後把丙棒上的中、小二銀圈搬到乙棒上去，又需要三次搬動才夠，所以總共需要搬動七次才能把大、中、小三個銀圈從甲棒移到乙棒上去。

從以上的討論，我們不難得到搬動 n 個銀圈所需次數 a_n 與搬動 $n-1$ 個銀圈所需次數 a_{n-1} 之間的關係。首先把放在上面的 $n-1$ 個銀圈從甲棒搬移到丙棒上去（共需搬動 a_{n-1} 次），其次把留在甲棒上的最大銀圈搬到乙棒上去（只搬動一次），最後再把剛剛搬到丙棒上去的 $n-1$ 個銀圈搬移到乙棒上去（又需搬動 a_{n-1} 次），這樣我們就完成了從甲棒把 n 個銀圈整個地移到乙棒上去的工作了。請參考下圖：



所以 a_n 與 a_{n-1} 之間便有下列關係：

(1) $a_n = 2a_{n-1} + 1$

在前面我們已經算出來 $a_1 = 1$，$a_2 = 3$，$a_3 = 7$，事實上，這些數據正好滿足遞迴關係式(1)，因爲

$$a_2 = 2a_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$a_3 = 2a_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

現在利用(1)式可以繼續推算 a_4，a_5 等等：

$$a_4 = 2 \cdot a_3 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$$

$$a_5 = 2 \cdot a_4 + 1 = 2 \cdot 15 + 1 = 31$$

………………

很湊巧地這些數都具有下列形狀：

$$a_1 = 1 = 2^1 - 1$$

$$a_2 = 3 = 2^2 - 1$$

$$a_3 = 7 = 2^3 - 1$$

$$a_4 = 15 = 2^4 - 1$$

$$a_5 = 31 = 2^5 - 1$$

那麼下面的每一個 a_n 是否也都可以寫成 $a_n = 2^n - 1$ 這個形狀呢？假設對於某一正整數 k，$a_k = 2^k - 1$ 眞的成立，那麼對於 a_{k+1}，我們有

$$a_{k+1} = 2a_k + 1 = 2(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1$$

因此，根據數學歸納法的原理，我們知道

(2) $a_n = 2^n - 1$

對於所有正整數 n 都成立，這就是我們所要的答案。

至於原先傷透古代老和尚腦筋的問題，有了公式(2)之後，馬上就有答案：老和尚們需要搬動 $2^{64} - 1$ 次才能把那六十四個銀圈從一根金棒搬移到另一根金棒上去。如果假定他們完全記住搬動的所有先後順序，不會在搬動過程中停頓下來，以搬動一次需時一秒鐘計算，總共需要 $2^{64} - 1$ 秒鐘。到底 $2^{64} - 1$ 秒鐘是多長的時間呢？我們不妨先來看看 2^{64} 是幾位數。令 $x = 2^{64}$，取對數（當然是指常用對數）後得

$$\log x = 64 \log 2 = 64 \times 0.30103 = 19.26592$$

所以 x 爲一個二十位的數，查對數表可以知道 x 大約等於

$$x \doteq 1.84467 \times 10^{19}$$

把這個秒數逐步化爲分、時、日、年可得

$$x \doteq 1.84467 \times 10^{19} \text{秒} = 184467 \times 10^{14} \text{秒}$$

$\doteq 3074.4 \times 10^{14}$ 分

$\doteq 51.24 \times 10^{14}$ 時 $= 5124 \times 10^{12}$ 時

$\doteq 213.5 \times 10^{12}$ 日 $= 2135 \times 10^{11}$ 日

$\doteq 5.84 \times 10^{11}$ 年

經過這個換算之後，我們終於瞭解到 $x = 2^{64}$ 秒相當於5840 億年，是一個很長很長的時間。難怪老和尚們(其實我們大家都一樣)做個沒完。

以上是實驗教材上一個例題的改寫。改完之後，我們順便檢一些遺漏下來的問題討論一下。

第一點，既然搬動六十四個銀圈需要五千八百四十億年這麼長的時間，我們好幾輩子都不可能做完，那麼把銀圈數目減少到多少時，這個遊戲才有可能玩呢？我們不妨先來算算看，十圈、二十圈、三十圈的時候，需要用多少時間。利用對數表或者直接計算可得

$2^{10} = 1024$ 秒

$\doteq 17.07$ 分

$2^{20} \doteq 1.049 \times 10^{6}$ 秒 $= 1049 \times 10^{3}$ 秒

$\doteq 17.48 \times 10^{3}$ 分 $= 1748 \times 10$ 分

$\doteq 29.13 \times 10$ 時 $= 291.3$ 時

$\doteq 12.14$ 日

$2^{30} \doteq 1.074 \times 10^{9}$ 秒 $= 1074 \times 10^{6}$ 秒

$\doteq 17.90 \times 10^{6}$ 分 $= 1790 \times 10^{4}$ 分

$\doteq 29.83 \times 10^{4}$ 時 $= 2983 \times 10^{2}$ 時

$\doteq 124.29 \times 10^{2}$ 日 $= 12429$ 日

$\doteq 34.87$ 年

換句話說，十圈時只要 17.07 分就可以做完，二十圈時需要 12.14 日，即將近兩個禮拜的時間，三十圈時則需要 34.87 年才能搬完。如果將圈數增加到四十圈時，因為

$2^{40} \doteq 1.099 \times 10^{12}$

所以所需時間約為

$2^{40} \doteq 1.099 \times 10^{12}$ 秒 $= 1099 \times 10^{9}$ 秒

$\doteq 18.32 \times 10^{9}$ 分 $= 1832 \times 10^{7}$ 分

$\doteq 30.53 \times 10^{7}$ 時 $= 3053 \times 10^{5}$ 時

$\doteq 127.21 \times 10^{5}$ 日 $= 12721 \times 10^{3}$ 日

$\doteq 34.85 \times 10^{3}$ 年 $= 3485 \times 10$ 年

$= 34850$ 年

這就不是有生之年可以做完的時間了。(由此可見，指數函數的增加率是很快很快的)。

第二點，如果想製造一個搬動銀圈(或者木圈、塑膠圈都可以)玩具的話，最適當的是十圈到十二圈，十二圈的所需時間是 17.07 分的 4 倍，即 68.28 分，約為一小時多一點。假如在遊戲途中亂了順序，還可以玩得更久呢。

第三點，當初從 a_n 的遞迴關係式(1)

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$

推出(2)式

$$a_n = 2^n - 1$$

的過程是經過觀察，歸納出來的，其實我們也可以用解差分方程式的方法來解。

令 $b_n = a_n - a_{n-1}$ ($n \geq 2$)，則

$$b_n = a_n - a_{n-1} = (2a_{n-1} - 1) - (2a_{n-2} - 1)$$

$$= 2(a_{n-1} - a_{n-2}) = 2b_{n-1}$$

所以 $\langle b_n \rangle$ 是公比為2的等比數列，而且 $b_2 = a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$，因此得 $b_n = 2^{n-1}$。

又從 b_n 的定義知道

$$b_n + b_{n-1} + \cdots\cdots + b_2$$

$$= (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1)$$

$$= a_n - a_1 = a_n - 1$$

移項後得

$$a_n = b_n + b_{n-1} + \cdots\cdots + b_2 + 1$$

$$= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots\cdots + 2 + 1$$

$$= \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1 \qquad \square$$