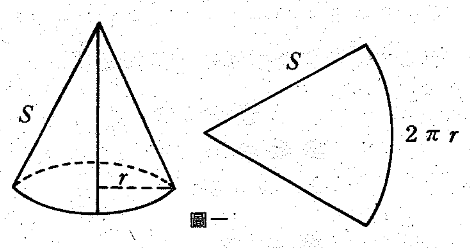
談數學直觀教學

國立台灣教育學院　科學教育系數學組　林來居

大約有百分之八十的學生一談數學臉色就變，難道數學眞的那麼難嗎？假如一位教師在介紹一個新的概念時能先用直觀方法來引進這新的概念，然後用邏輯推理去驗證新的原理、學說是否正確，這樣學生對數學會比較感興趣，而學習效果也會好一點。用直觀方法引進新概念之優點是學生可以越過障礙看到一些以前未學過的東西，這種教學方法常要借助敎具，讓學生親自動手去做，親自去體驗，親自去發現，所以用這種方法敎學學生不會感到索然無味，用這種方法敎學學生比較容易接受新東西，現在就舉一些實例來說明。

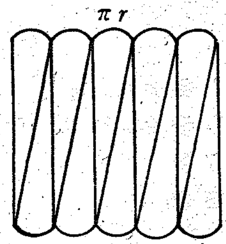
例 1 ：有一圓錐之底半徑爲 r ，斜高 S ，求其側表面積。

方法：1 我們可以將圓錐"剪開"而得一扇形區域。



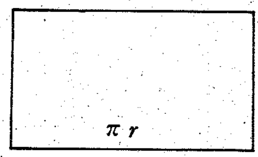
圖一

2 將此扇形"剪開"成 $2n$ 個小扇形並貼成下面之圖形



圖二

3 如圖二小扇形個數非常多，換句話說當把圖一"剪成"非常多個小扇形時圖二之形狀會漸漸趨近一個長方形如圖三。



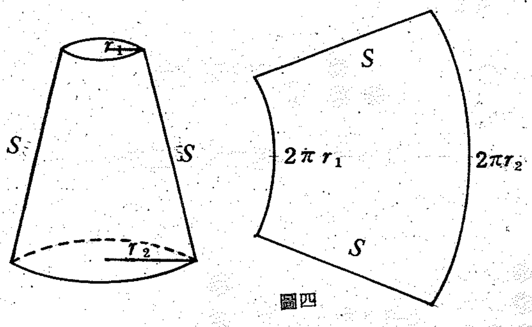
圖三

由於圓錐側表面積和圖一之面積一樣，圖一面積和圖二面積一樣，當 $n \to \infty$ 時圖二面積趨近圖三，但圖三面積爲 $\pi r s$，所以不難猜出圓錐側表面積爲 $\pi r s$。

例 2 ：有一圓錐台上下底半徑分別爲 r_1, r_2 而斜高 S ，求其側表面積。

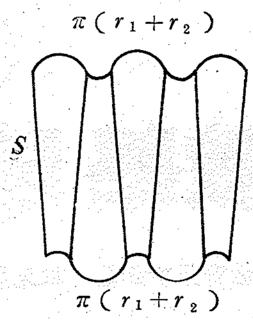
此問題的處理方法和例 1 相同，我們可以這樣求其側表面積。

1 我們可將此圓錐台"剪開"而得如下區域。



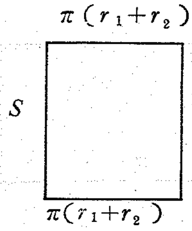
圖四

2 將圖四"剪成" $2n$ 個相同的小圖形貼成圖五。



圖五

3. 如n非常大時圖五形狀漸漸趨近一長方形如圖六。



圖六

由於圓錐台之側表面積等於圖四面積，亦等於圖五面積，而圖五面積趨近圖六面積，所以我們不難猜出圓錐台側表面積為$S\pi(\gamma_1+\gamma_2)$

$$=2\pi\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}S$$ ＝平均周長與斜高之積。

用同樣方法我們可以算出圓面積及圓柱體側表面積，讀者可以自行試看看。

如讓學生排圍棋棋子很容易發現一些等差級數公式。

例3.

○　　○●　邊2之正方形
　　　●●

1　　$1+3$＝每邊二粒之正方形＝2^2

●○○
●○○　每邊3粒正方形
●●●

$3+5=3^2$

●○○○
●○○○
●○○○
●●●●

$1+3+5+7=4^2$

●○○○○
●○○○○　每邊5粒之正方形
●○○○○
●○○○○
●●●●●

$1+3+5+7+9=5^2$

●○○○○○
●○○○○○
●○○○○○
●○○○○○
●○○○○○
●●●●●●

$1+3+5+7+9+11=6^2$

●○○○○○○
●○○○○○○
●○○○○○○
●○○○○○○
●○○○○○○
●○○○○○○
●●●●●●●

$1+3+5+7+9+11+13=7^2$

如此繼續排下去學生不難發現公式

$1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2$

例4.：學生靠排圍棋棋子可以發現

○○　　○○● 長3寬2之
2　　　●●● 長方形

$2+4=2\times3$

○○○● 長4寬3
○○○● 之長方形
●●●●

$2+4+6=3\times4$

○○○○● 長5寬4
○○○○● 之長方形
○○○○●
●●●●●

$2+4+6+8=4\times5$

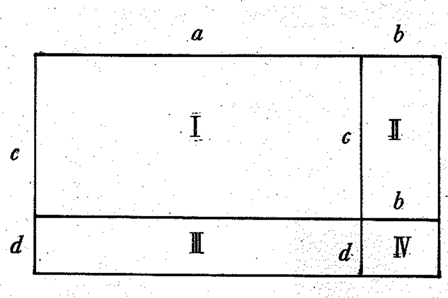
如繼續排下去，學生不難發現這樣公式。

$2+4+6+8+\cdots\cdots+2n=n(n+1)$。

除此外我們亦可用堆垜術去求得一些級數公式。

我們亦可利用面積或體積間的關係求得一些代數重要公式。

例 5.：考慮下面圖形面積關係，其邊長如圖七所示



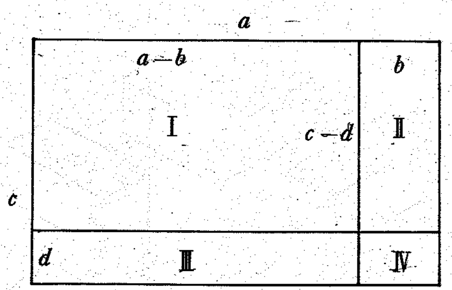
圖七

大長方形面積＝Ⅰ之面積＋Ⅱ之面積＋Ⅲ之面積＋Ⅳ之面積

因此 $(c+d)(a+b)=ac+bc+ad+bd$。

當 $a=c$，$b=d$，我們又得到 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

如考慮下圖面積關係就得另一公式



圖八

如利用圖八面積間關係我們可以得到

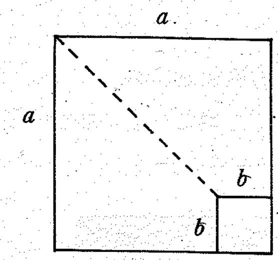
$(a-b)(c-d)=ac-bc-ad+bd$

當 $a=c$，$b=d$ 時，我們得到 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

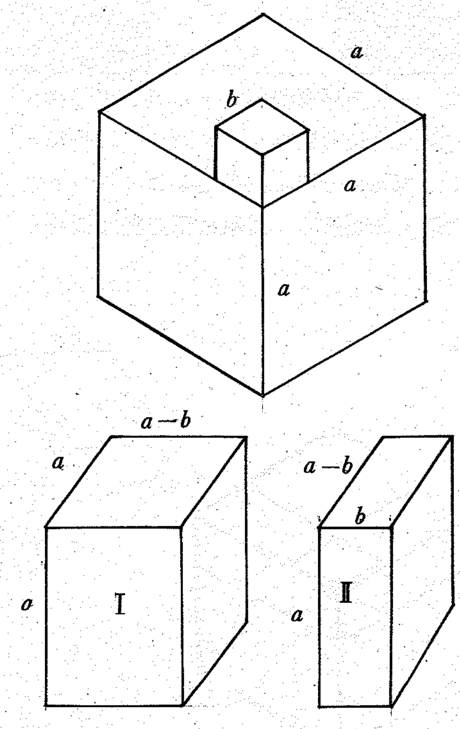
例 6.：一邊長為 a 之正方形去掉邊長為 b 之小正方形剩下區域為兩相等梯形（如圖九），因此從面積關係，我們得到

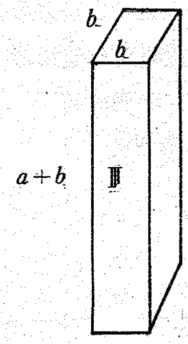
$a^2-b^2=2$ 梯形面積

$=2\times\frac{1}{2}(a+b)(a-b)=(a+b)(a-b)$



例 7.：邊長為 a 之正方體上方放一個邊長為 b 之正方體，其體積和為 a^3+b^3，放小正方體後此物體可分成三部份。即下圖之Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ。





加小立方體後之體積

$= a^3 + b^3$ = Ⅰ之體積＋Ⅱ之體積＋Ⅲ之體積

$= (a-b)a^2 + ab(a-b) + b^2(a+b)$

$= a^3 - a^2b + a^2b - ab^2 + b^2(a+b)$

$= a^2(a+b) - ab(a+b) + b^2(a+b)$

$= (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

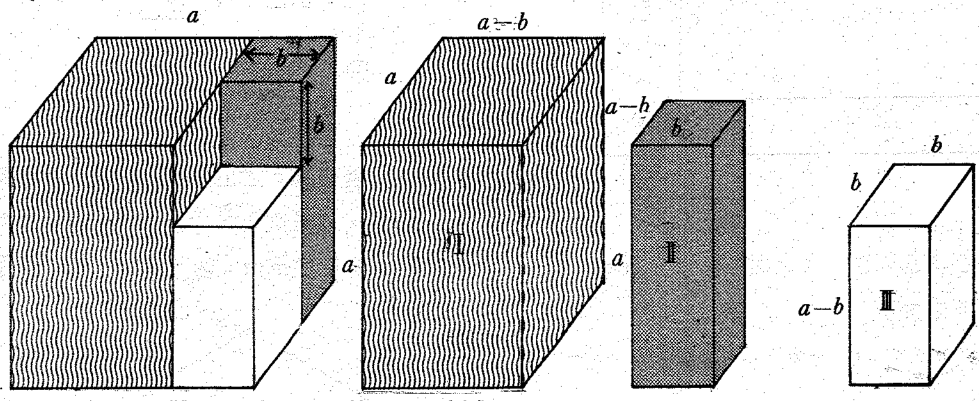
例 8.：邊長為 a 之正立方體如挖去一邊長為 b 之小正方體後其形狀可分成三部份，如下圖Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ即為挖得剩下三部分。

挖去後體積 $= a^3 - b^3$

＝Ⅰ之體積＋Ⅱ之體積＋Ⅲ之體積

$= (a-b)a^2 + (a-b)ab + (a-b)b^2$

$= (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

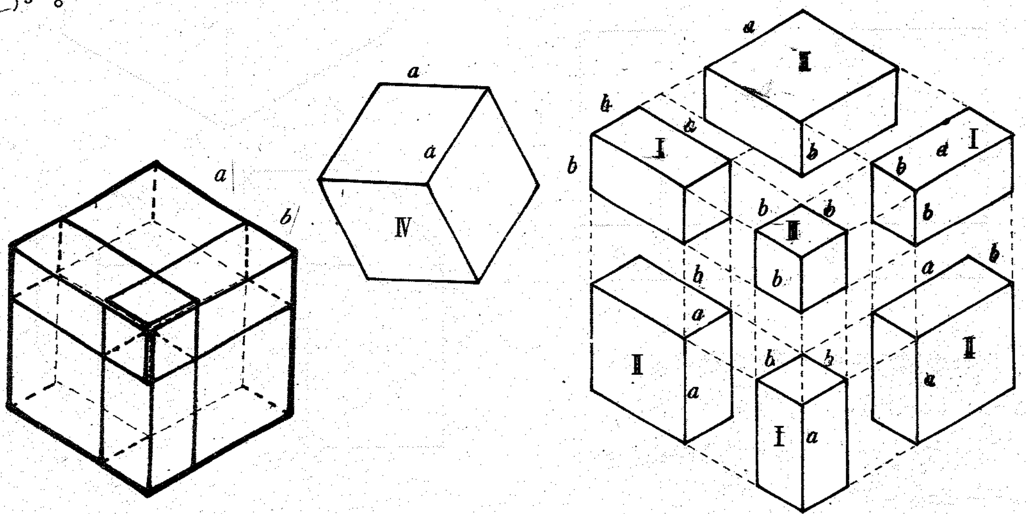


例 9.：一正方體邊長為 $a+b$ 其圖形可拆成二小立方體其邊長分別為 a 及 b 及三個邊長為 a，b 及 a 之相同長方體及三個邊長為 a，b，b 之相同長方體，如圖所示，而原來正方體體積為 $(a+b)^3$。

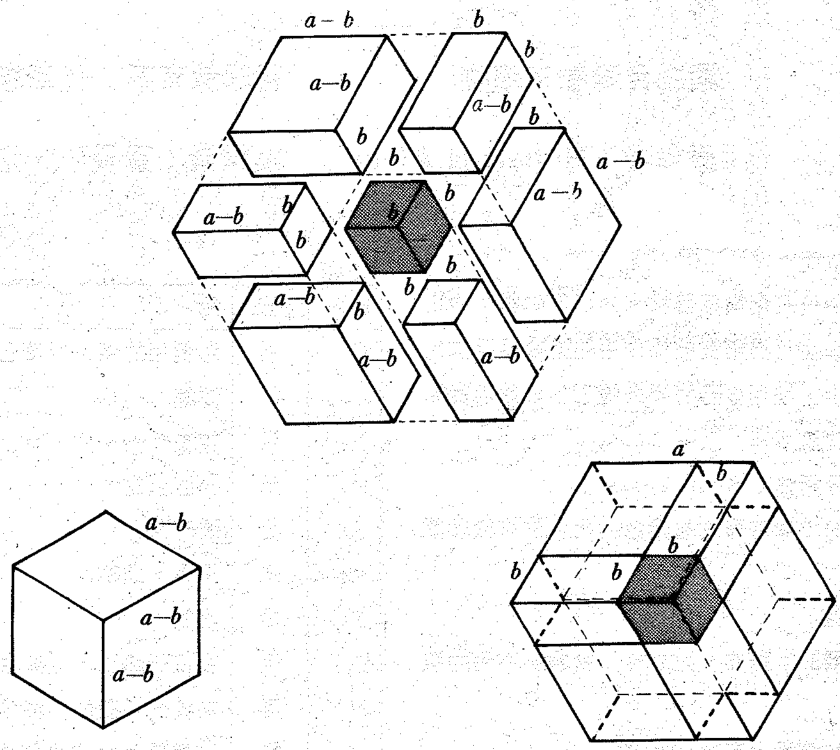
因此 $(a+b)^3$

＝3 個Ⅰ體積＋3 個Ⅱ體積＋Ⅲ之體積＋Ⅳ之體積

$= 3ab^2 + 3a^2b + b^3 + a^3$



例10.：同理我們可用相同圖形，祇把邊長改變，觀察其體積關係就可得到$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$



像這種例子很多，不勝枚舉，讀者祇要費點心，都可找到這種例子，例7.，例8.，例9.，例10.，最好能用一些數學模型來輔助教學，這樣學生才有辦法觀察其間圖形關係。

直觀教學雖然有很多優點，但有時也會產生錯誤，所以光靠直觀還不夠，有時還需要靠邏輯推理，我們用這種教法最主要目的是要幫助學生理解。

□

參考資料

1. 王懷權著：代數發展史，協進圖書公司，pp.67－68（65.年10.月）。
2. 諸明嘉著：楊輝三角，人間文化事業公司，pp.33－36（68.年4.月）
3. 張靜譽著：如何以不同的內容模式解答學生的問題，科學教育雙月刊第35.期，pp.35（69.年6.月）。
4. Lancelot Hogben：*Mathematics in the Making*, MCMLX Rathbone Books Limited, London, pp.18 and pp.57－58。