●民國萬年曆●

國立台灣師範大學數學系　趙文敏

一、前言

在本文中，我們要介紹有關“民國某年某月某日是星期幾？”的求法。在科學教育月刊第二十九期中，薛昭雄教授與呂德根老師曾合寫一篇類似的文章；不過，本文所要介紹的，却有下列兩個不同點：

1. 我們使用民國紀元，而非西曆紀元。
2. 在我們的公式中所使用的年月日，是眞正的年月日，而不必把每年的一月視爲去年的第十三月。

二、一個數學觀念

若 x 是一個實數，則〔 x 〕表示小於或等於 x 之整數中最大者。例如：〔 3.2 〕= 3，〔 2 〕= 2，〔 −4.3 〕= −5，等等。

對於這個觀念，有一個性質是本文將會引用的：若 n 是一個整數，則〔 $n+x$ 〕$=n+$〔 x 〕。

三、閏年的規定

現行陽曆是西元 1582 年改訂的，對於閏年的規定可以分成三點說明如下：

1. 西元之年數可被 4 整除但不能被 1 0 0 整除者爲閏年；例如，西元 1 9 8 0 年是閏年。

2. 西元之年數可被 1 0 0 整除但不能被 400 整除者不是閏年；例如，西元 1 9 0 0 年不是閏年。

3. 西元之年數可被 4 0 0 整除者爲閏年；例如，西元 2 0 0 0 年是閏年。

四、民國 n 年 m 月 k 日是星期 a

根據現行陽曆置閏的規定，我們要導出“民國 n 年 m 月 k 日是星期幾？”的計算公式，是以西元 1 6 0 0 年 3 月 1 日爲基準日，先求出西元 1 6 0 0 年 3 月 1 日與民國 n 年 m 月 k 日之間相隔的天數 $f(n,m,k)$。由於西元 1 6 0 0 年 3 月 1 日是星期三，而設民國 n 年 m 月 k 日爲星期 a（若 $a=0$，則表示星期天；若 $a=1$，則表示星期一；餘類推），則可知 a 是 $f(n,m,k)+3$ 被 7 除所得之餘數。

五、$f(n,m,k)$ 之表示式

民國 n 年是西元（ $1911+n$ ）年，所以，西元 1 6 0 0 年（不含）至民國 n 年（含）之間共有

$$\left[\frac{n+311}{4}\right]-\left[\frac{n+311}{100}\right]+\left[\frac{n+311}{400}\right]$$

個閏年；於是，對每個正整數 n，

$$f(n,3,1)=365(n+311)+\left[\frac{n+311}{4}\right]-\left[\frac{n+311}{100}\right]+\left[\frac{n+311}{400}\right],$$

這是因爲西元 1 6 0 0 年 3 月 1 日與民國 n 年 3 月 1 日之間相隔整整（ $n+311$ ）年，而其中的閏年數已說明如上。

當 $3\leq m\leq 12$ 時，令 $g(m)=f(n,m,1)-$

$f(n,3,1)$，顯然地，

$$g(3)=0,$$
$$g(4)=28\times 1+3,$$
$$g(5)=28\times 2+5,$$
$$g(6)=28\times 3+8,$$
$$g(7)=28\times 4+10,$$
$$g(8)=28\times 5+13,$$
$$g(9)=28\times 6+16,$$
$$g(10)=28\times 7+18,$$
$$g(11)=28\times 8+21,$$
$$g(12)=28\times 9+23,$$

仿照1882年Zeller之公式的形式，我們可以將 $g(m)$ 表示如下：設 $3\leq m\leq 12$，則

$$g(m)=28(m-3)+[2.6m-7.4]。$$

於是可知，當 $3\leq m\leq 12$ 時，恒有

$$f(n,m,k)=f(n,3,1)+k-1+28(m-3)+[2.6m-7.4],$$

因爲 m 月1日與 m 月 k 日之間相隔（$k-1$）天。

然而，當 $1\leq m\leq 2$ 時，情形就不相同了。因爲在平年中，二月只有28天；而在閏年中，2月却有29天。所以，當 $1\leq m\leq 2$ 時，要求出 $f(n,m,k)$，利用 $f(n,3,1)$ 是不妥當的，這是因爲 $f(n,3,1)-f(n,m,k)$ 之值會因該年是否爲閏年而受影響。

因此，我們改用 $f(n-1,3,1)$ 來導出 $f(n,m,k)$。即

$$f(n,1,k)=f(n-1,3,1)+28\times 10+26+k-1,$$
$$f(n,2,k)=f(n-1,3,1)+28\times 11+29+k-1。$$

這兩個式子可以合併如下：當 $1\leq m\leq 2$ 時，

$$f(n,m,k)=f(n-1,3,1)+28(m+9)+m+30+[2.6m-7.4]+k-1。$$

最後，我們還可以將 $1\leq m\leq 2$ 與 $3\leq m\leq 12$ 兩種情形所對應的 $f(n,m,k)$ 合併成一個等式。不過，在表出時，這個式子是比較冗長的:

$$f(n,m,k)=f\left(n-\left[\frac{12-m}{10}\right],3,1\right)+28\left(m+12\left[\frac{12-m}{10}\right]-3\right)+(m+30)\left[\frac{12-m}{10}\right]+[2.6m-7.4]+k-1。$$

讀者不難看出，當 $1\leq m\leq 2$ 時，$\left[\frac{12-m}{10}\right]=1$；而當 $3\leq m\leq 12$ 時，$\left[\frac{12-m}{10}\right]=0$。若將上述右端的第一項再行改寫，則得

$$f(n,m,k)=365\left(n-\left[\frac{12-m}{10}\right]+311\right)+\left[\frac{n-\left[\frac{12-m}{10}\right]+311}{4}\right]-\left[\frac{n-\left[\frac{12-m}{10}\right]+311}{100}\right]+\left[\frac{n-\left[\frac{12-m}{10}\right]+311}{400}\right]+28\left(m+12\left[\frac{12-m}{10}\right]-3\right)+(m+30)\left[\frac{12-m}{10}\right]+[2.6m-7.4]+k-1。$$

六、主要結果

當 $f(n,m,k)$ 之公式導出之後，我們就可以推算民國 n 年 m 月 k 日是星期幾了。前面我們已經說明：若民國 n 年 m 月 k 日是星期 a，則 a 是 $f(n,m,k)+3$ 被7除所得之餘數。因此，將 $f(n,m,k)+3$ 之各項中所含的7之倍數捨棄，不會影響我們所要求的 a 值。如此，得

$$365\left(n-\left[\frac{12-m}{10}\right]+311\right)$$

可改爲 $n-\left[\frac{12-m}{10}\right]+3$，

$28\left(m+12\left[\frac{12-m}{10}\right]-3\right)$ 可改爲0，

$(m+30)\left[\frac{12-m}{10}\right]$ 可改爲 $(m+2)\left[\frac{12-m}{10}\right]$，

更進一步地，還有

$$\left[\frac{n-\left[\frac{12-m}{10}\right]+311}{4}\right]=\left[\frac{n-\left[\frac{12-m}{10}\right]+3}{4}\right]+77,$$

$$\left[\frac{n-\left[\frac{12-m}{10}\right]+311}{100}\right]=\left[\frac{n-\left[\frac{12-m}{10}\right]+11}{100}\right]+3,$$

$$[2.6m-7.4]=[2.6m-0.4]-7。$$

綜合以上之說明可知，a 是

$$n+k+2+[2.6m-0.4]+(m+1)\left[\frac{12-m}{10}\right]$$
$$+\left[\frac{n-\left[\frac{12-m}{10}\right]+3}{4}\right]-\left[\frac{n-\left[\frac{12-m}{10}\right]+11}{100}\right]$$
$$+\left[\frac{n-\left[\frac{12-m}{10}\right]+311}{400}\right]$$

被7除所得的餘數。這是本文所要求的結論。

上面這個式子略嫌冗長，不過，當 $0<n<189$ 時，我們知道

$$-\left[\frac{n-\left[\frac{12-m}{10}\right]+11}{100}\right]+\left[\frac{n-\left[\frac{12-m}{10}\right]+311}{400}\right]=0。$$

因此，我們可以寫出一個適合目前使用而較爲簡短的結果如下：設民國 n 年 m 月 k 日是星期 a，若 $0<n<189$，則 a 等於下述整數被7除之餘數：

$$n+k+2+[2.6m-0.4]+(m+1)\left[\frac{12-m}{10}\right]$$
$$+\left[\frac{n-\left[\frac{12-m}{10}\right]+3}{4}\right]。$$

例如，民國69年1月1日是星期二，證明如下：

$$69+1+2+[2.6-0.4]+2\left[\frac{11}{10}\right]+\left[\frac{72-\left[\frac{11}{10}\right]}{4}\right]$$

$$=69+1+2+2+2+17=93=7\times13+2,$$

即該數被7除之餘數爲2，故民國69年1月1日是星期二。讀者試自證明：民國元年1月1日是星期一，而民國35年4月30日爲星期二。 □

益智遊戲——是誰說謊

本社

一位水手，有一次到達一個奇特的島上；這個島上的居民分成兩類，我們稱之爲A類與B類。稱爲A類的人永遠說謊，而稱爲B類的人永遠說實話。這位水手了解這個島上的情形，於是，在他上岸而遇見三位島民時，他就問第一位島民說：「你是個A還是個B？」

第一位島民只會說島上的土話，所以，他雖然回答了，可是水手却聽不懂。於是，水手就轉問第二位島民說：「他剛剛說什麼？」

第二位島民回答說：「他說他是個B，他確實是個B。」

第三位島民接着說：「錯了，第一個人是A而我才是B。」

水手聽了這些話，迷惑地搖搖頭。

這三位島民中，到底誰是說謊者呢？

要了解這個問題的答案，我們得先知道一件事實，那就是：每一位島民都會說他是一個B。爲什麼呢？因爲如果他是一個A，那麼他是句句謊話，所以他不會說他是一個A，而會說他是一個B。如果他是一個B，則他永遠說實話，那麼他自然會說他是一個B。了解這一件事實之後，我們就知道這個情況：儘管第一位島民所回答的話，水手聽不懂，但是，我們知道他所回答的話一定是「我是一個B」。他的回答既是如此，則第二位島民所說的「他說他是個B」，就可以說明第二位島民沒有說謊，也就是說，第二位島民是個B。第二位島民既是個B，那麼，他所說的「他確實是個B」，就是一句實話，也就是說，第一位島民是個B。如此一來，我們就可以了解，在這三位島民中，只有第三位是說謊者了，因爲他說第一位島民是個A。 □