# 有關挿入法原理的教學

國立政治大學 應用數學系　薛昭雄

（一）

在高一的階段裡，常需教到對數表的查表。由於查表自然而然地引出了挿入法（內挿法）的介紹，目前一般教科書處理的方式是以比例的方法來處理。常見的課文是（註一）

內挿法的原理：當 x 變動很微小時，y 的變動也很微小（ log 函數是連續函數），而且 x 的變動量△ x 與 y 的變動量△ y ，近似的成比例。

本文的目的是想將挿入法原理加以正式化，這兒提到二種教學的方法：一為一般數值分析中提到的方法；另一則為比較自然的教學方法。這二方法也許都可以在現行高中教學，但前法必須知道一些解析幾何，而後法則不必，因此也許更可以在高中教學了。

（二）

內挿法的問題可粗略地說是想解決下列的問題：

找出一個函數 $f(x)$ 在 $x=x_0$，$x_1$ 時之値分別為 $f(x_0)$，$f(x_1)$。

這個問題就等於是：已知（$x_0$，$f(x_0)$），（$x_1$，$f(x_1)$）二點，找出一條直線方程式來。

如果我們利用二點式的話，自然地可有下列的算式：

$$\frac{y-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

或

$$\begin{aligned} y&=f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}(f(x_1)-f(x_0)) \\ &=f(x_0)+(x-x_0)\left(\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\right) \qquad (*) \end{aligned}$$

這就是內挿法的公式，也是其原理的根據，這也就是對數表計算常用的公式。

上面的推導過程是先假定了學生已學過二點式的公式。但是在高一時，二點式仍未教學，如何能迴避二點式的利用呢？下面也許是另一種嘗試：

因為直線方程式必是　$y=ax+b$

其中 a 與 b 為待定之常數

又因　$x=x_0$ 時，$y=f(x_0)$

　　　$x=x_1$ 時，$y=f(x_1)$

所以我們得　$f(x_0)=a+bx_0$

　　　　　　$f(x_1)=a+bx_1$

解上面聯立方程式得

$$a=\frac{1}{x_1-x_0}(x_1f(x_0)-x_0f(x_1))$$

$$b=\frac{1}{x_1-x_0}(f(x_1)-f(x_0))$$

於是

$$y=\frac{1}{x_1-x_0}\left[(x-x_0)f(x_1)-(x-x_1)f(x_0)\right]$$

故 $y=f(x_0)+(x-x_0)\left(\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\right)$

（三）

下面我們想介紹一種另外處理的方式，它不需利用到任何的預備知識及前題，即設其函數爲直線方程式。

這個解決這問題的敎學方式是：先作一函數 $p(x)$ 使在 $x=x_0$ 時等於1，在 $x=x_1$ 時爲0；再作一函數 $q(x)$ 使其在 $x=x_0$ 時等於0，在 $x=x_1$ 時爲1。這樣子

$$f(x_0)p(x)+f(x_1)q(x)$$

就是我們所要的結果了。

$p(x)$ 可以這樣子定義出來：因爲它在 $x=x_1$ 時，$p(x_1)=0$ 所以可設

$$p(x)=\lambda(x-x_1)$$

又因 $p(x_0)=1$；故 $\lambda=\frac{1}{x_0-x_1}$

即 $p(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}$

同理得 $q(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$

因此 $y=f(x_0)\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+f(x_1)\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$

即爲所求，將上式化簡得

$$y=f(x_0)+(x-x_0)\left(\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\right)$$ 此即爲式（*）。

（四）

在第㈢節中，我們提出的處理方法，事實上，很容易把它推廣到一般情形（請注意第㈡節所提及的方法就沒有這麼方便）。

爲了方便解說，我們考慮下列的簡易情形。

問題：試找出一個函數 $f(x)$ 使 $f(a)=A$，$f(b)=B$，$f(c)=C$。

仿㈢所提示，我們先作一個函數 $p(x)$ 使 $p(a)=1$，$p(b)=p(c)=0$；再作一個函數 $q(x)$ 使 $q(b)=1$，$q(c)=q(a)=0$；然後再作 $r(x)$ 使 $r(c)=1$，$r(a)=r(b)=0$，這樣 $Ap(x)+Bq(x)+Cr(x)$ 卽合乎所求了。

因爲 $p(b)=p(c)=0$ 故可定義

$$p(x)=\lambda(x-b)(x-c)$$

因 $p(a)=1$，可知 $\lambda=\frac{1}{(a-b)(a-c)}$

於是 $p(x)=\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}$

同樣地可得 $q(x)=\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}$

$$r(x)=\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

於是
$$f(x)=A\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+B\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+C\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} \quad (**)$$

（**）式就是著名插入法中的 Langrange 公式。

由（**）式之推演方法，不難得出一般的插入法公式來：

在 n 個相異點 $a_1,\cdots,a_n$，函數 $f(x)$ 之對應值分別爲 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 之插入公式爲

$$f(x)=\alpha_1\frac{(x-a_2)\cdots(x-a_n)}{(a_1-a_2)\cdots(a_1-a_n)}+\alpha_2\frac{(x-a_1)(x-a_3)\cdots(x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\cdots(a_2-a_n)}+\cdots+\alpha_n\frac{(x-a_1)\cdots(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)\cdots(a_n-a_{n-1})}$$ □

**註一：** 錄自黃敏晃等編著高中數學第一册第186頁。