

國民中學數學的教與學

雲林縣立土庫國中 吳國龍

西哲謂：「辦教育看教師」，教師素質的高低，繫乎教育的成敗，更進而決定國家的興亡，史蹟昭昭，有目共睹，總統 蔣公曾說：「在教室內作育英才的教師，其功勞不下於馳騁疆場的官兵」，教師是復興文化的先驅，是民族精神的護衛，是胸懷壯闊的志士，是悲天憫人的先知，教師的工作，清高而神聖，曾有人喻之為建設社會的工程師，當非溢美之詞，然則，教師的任務既如此的艱鉅，其工作又如此繁重，如何使教學工作合乎科學原則，而又進入藝術的境界，則是我們大家不能不特加注意的問題，有人問春蠶為何而吐絲，問蠟炬為何而流淚，它們都以默默的無言，答覆了這不可言的問題，我贊美春蠶的吐絲，我同情蠟炬的流淚；又有誰來贊美，來同情，猶如春蠶，猶如蠟炬的教師呢？美國教育家——亨利·溫·戴克之「敬向無名的教師」一文：我頌揚無名的教師。偉大的將軍們贏取戰役的勝利，但，那是要歸功於得勝的無名小卒。聞名的教育家計劃出新的教育制度。但，向年青一代陳說指導的是無名的教師，他默默無聞的生活，而同艱難奮鬥。他沒有軍號迎送，沒有戰軍隨侍，也沒有金黃色的勳章頒給。他深知沿著愚昧邊緣的警戒，向無知和愚蠢的戰壕攻擊，他耐心的盡責任，拚命征服青年的敵人——一惡勢力，他喚醒懵懂的人，他振作怠惰的人，鼓舞熱切的人，堅定動搖的人。他傳達自己讀書的歡樂，再和莘莘學子共享這最高精神上

的寶藏，他燃亮了许多生命的燭光，它們在最後的歲月裡迴光返照，給他安慰，這是他的報酬，沒有人比他們更配稱之為：「個人的君王，全民的僕役」。

相信每位教師聽了亨利·溫·戴克的話，也能多少得到一些安慰吧！開了場白以後，我們把文筆轉到本文的主題——國民中學數學的教與學——

「國民中學數學的教與學」這是一個涉及相當廣泛而且極富有深度的問題，筆者本著「初生的犢兒不怕虎」的精神，大膽的假設，細心的求證，首先來談談「如何教好國中數學」，接著再談「如何學好國中數學」，如果能因此而引起教師及同學對這一問題的重視，得到拋磚引玉的效果，將是筆者最大的希望。

近年來教育當局為改進數學教育所做的努力不可謂不多，不但在課程，教材和教法方面都有新的設計與理論的產生，以國民中學的數學教材來說，現在尚有國民中學數學實驗教材正在實驗當中，可是每當一種新教材的出現，市面上各種參考書遍流，歪曲了教材的本意，且違背了預定的教學目標，再加上聯考領導教學的壓力，所以，雖然在教育正常化的呼聲中，卻往往存在著不少不正常的現象，現在讓我們停下來看看數學教育已經走到了那裡？應再往那兒走？這當然是刻不容緩的課題。在談「如何教好國中數學」以前，我們必先對國民中學教育目標，國民中學數學教學目標及國民中學數學教材作個分析，然

後針對著教育目標，教學目標及教材討論出一種最適宜的教法。首先談到國民中學的教育目標：

國民中學的教育目標，在於繼續國民小學之基本教育，發展青年身心，陶融公民道德，灌輸民族文化，培育科學精神，實施職業陶冶，充實生活知能，以養成忠勇愛國，德智體群均衡發展之健全國民，並奠定其就業或升學的基礎。本著這個目標，數學教育所偏重的乃在於培養科學精神，實施職業陶冶，充實生活知能，以養成忠勇愛國，德「智」體群均衡發展之健全國民，並奠定其就業或升學的基礎。在此所要特別說明的是培養科學精神，一般人有個錯覺，往往以自然科學來涵蓋科學的全部，似不知有所謂中文科學化與科學中文化的言詞，亦似不知數學是科學之後，是科學之門和鑰，數學是不可動搖的科學基礎，數學教育在培養科學精神的過程中，實質上，其重要性往往超過一般人心目中的想像。接著談到國民中學數學的教學目標：

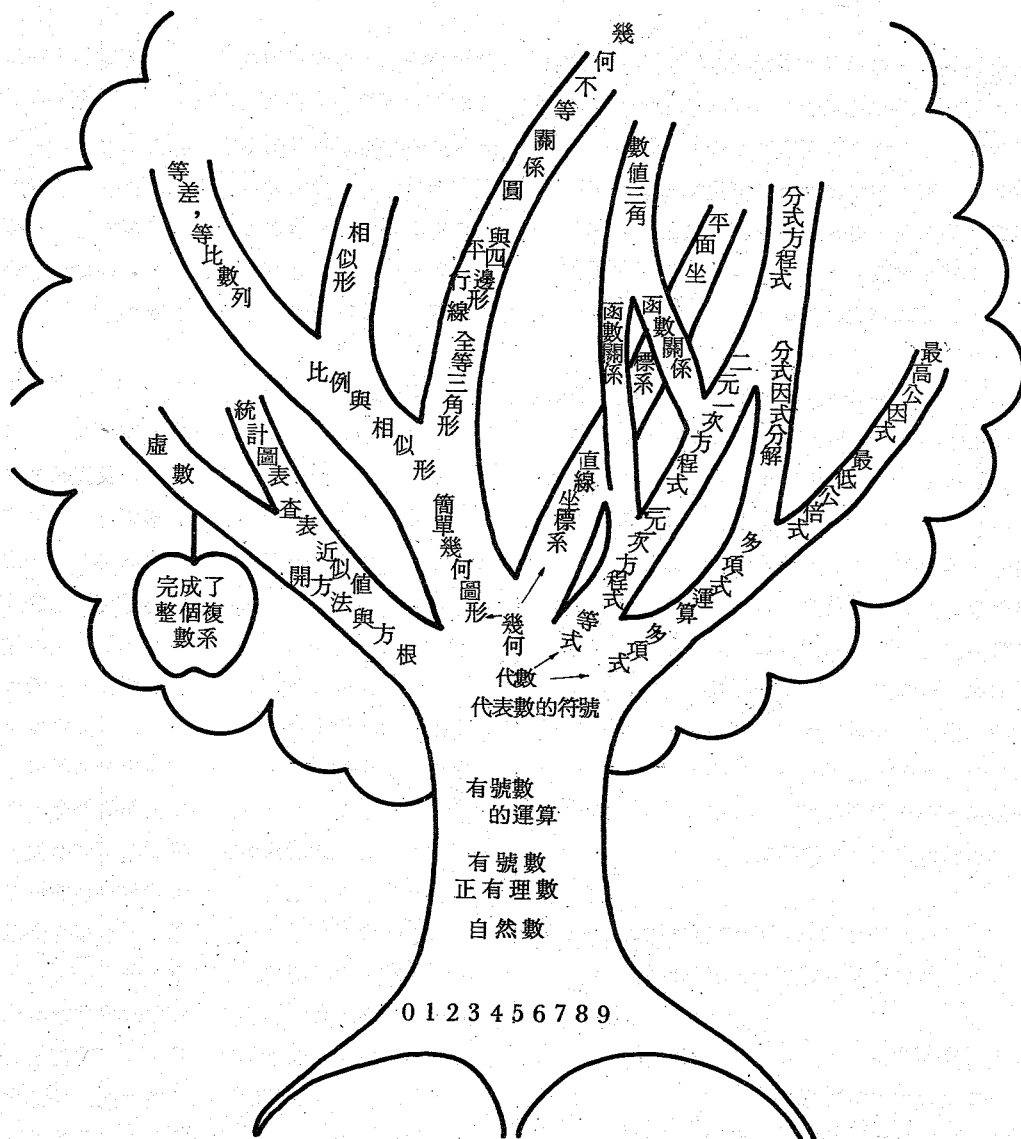
- ①使學生了解數與形的關係及性質，並培養其對「空間」「函數」的直觀概念。
- ②訓練學生關於計算查表及基本作圖的技能。
- ③培養學生以簡御繁，由已知推未知的能力。
- ④供給學生日常生活中數量的知識，使其認識數學的應用價值，並啟發其研究自然環境中數量問題的興趣。

筆者認為數學教育乃是將前人的經驗和努力探求的結果傳於後人，以減少後人嘗試錯誤所浪費的時間，同時又有「練智」和「實用」的雙重功效。例如：教師要訓練學生對於「形」的概念，看到了遠遠的一個鄉村，有樹木、有小屋、有河流、有小橋，在詩人的眼裡是多麼詩情畫意，但對學數學的人而言，我們所應注意到的卻不是什麼「枯藤、老樹、昏鴉、小橋、流水、人家」，我們眼裡所分辨出的那都是一些幾何圖形，一棵樹彷彿一個圓柱體，一間小屋就是一個角錐體躺在

一個立方體之上，一座橋從旁看來是一條折線或是一段圓弧，一道河流就是一條窄的曲面，我們訓練學生從觀察自然界的現象，而引發其對幾何圖形的興趣，以便將其所學再應用到自然界及日常生活中，至於代數亦然，由量而數而方程式而用之於解決日常生活中的問題。敘述完了國民中學數學的教學目標以後，接著來談談國中數學教材，現在以盆景的方式來分析一下國中三個學年所必須學習的數學教材如下：

看了以上國民中學教育目標，國民中學數學教學目標，及國民中學數學教材分析，教師心理上應該有個準備——「如何教好國中數學」，配合各方面的目標與教材，在教學的過程中，如果學生沒有能力提出——老師！您要帶我們到那兒去呢？教師也應該有個預想——同學們！老師將要帶你們到數學樂園，但到樂園的途中，我們將要經過一些橋樑，一些小路，一些岔路，還有一些崎嶇不平的山路——這裡所謂的樂園就是指定我們到達的目的地，而所須經過的橋樑……等，該是分析達到這目的地的方法，數學是人類一部重要的方法論，沒有一個天才能夠在不接受這部方法論的精髓而得自創一流，超越同時代的數學家，這在數學史上已成定論，人類從數目字的加減乘除計算中，領悟了運算的意義，由國中數學教材的盆景，我們可以很清晰的看出，國中階段不必再重覆歷史幾千年的發明過程，而可以學習到整個複數系及數值三角之類的知識，但是，教師如何來引導學生由最低程度的印度阿拉伯數字而達於比較高層次的階段呢？這就是教學法所應注意的事項。在還未進入主題以前再舉幾個例子，然後根據這幾個例子的缺失，來討論「如何教好國中數學」。

一、記得四、五歲的時候，我住在水林的鄉下，父親曾幾次帶我到水林菜市場，這段路子不



算太長，大約二十分鐘的路程，可是要拐好幾個彎，走過幾條小巷，每次父親走在前邊，我就跟在後頭，父親的步伐大且快，我必須兩腳不停的划，眼睛不停的瞪著他那粗黑的腳，一路不停的走，對於這條路，來回已跟父親走過四、五趟，可是到了市場東看西看的，而父親卻不知在什麼時候失蹤了，回家的路子怎麼一下子變得如此陌生，我甚至分不清家的方向，我苦苦思憶，但呈

現在眼前的總是父親那粗黑的腳，過了一會兒才傳來父親焦急的找阿龍的呼叫聲。

二、有一次，大哥帶著我玩玻璃珠去了，我在旁邊看著他玩，過了一會兒，心裡很不耐煩，吵著要回家，可是大哥玩得興緻正濃，「弟弟！你自己回家去好嗎？往這條路一直走，然後走了大約一分鐘右轉，走了約二百公尺再左轉，有一

個成發製冰廠的招牌，很顯明的，藍色的底寫上白色的字，那便是家了」，一股莫名的煩惱湧上了我的心頭，我的天啊！家？你在何方，最後硬著頭皮走到了拐彎的地方，就也不知如何走法，祇好放聲大哭，還好，小時候，父親就常問我——爸爸是什麼名字，後來有個好心的阿姨帶我回家了，大哥回家也挨了鞭子。

三、最後一個例子，很多學生，來到了岸邊，不假思索便上了船，一齊擠入船艙，船起航，船到了彼岸，學生走出船艙，河渡過了，但是，河中的景象，河水的冷暖於學生却一無所覺，在船艙裏人的四肢是休閒的，眼睛是蒙蔽的，一個學生可以通過無數次的考試，讀過無數本書，仍是一片昏沈，一個人可以上過無數次船仍是一片無知，教師扮演著運輸船的角色，即使程度較好的，領悟力較強的學生，雖然從暗無天日的船艙裡擠了出來，上了甲板，開闊眼界，沐浴於浪雨斜陽，但終究不入河水，四體不動，蝦蟹不分，無法體會大自然奧秘。

看了以上三個例子，現在我們面對著——如何教好國中數學這一問題，分項說明如下：

一、明指歸向：

本文以盆景的方式來說明國民中學數學教材，其目的在於明指歸向，上課時，有時候，教師沒有告訴學生，「我們要到那兒？」，沒有指出大體的方向，一開始就下定義，一味要學生一步步陷入推理的泥坑，以為這便是思考的訓練，這便是數學教育，其實這祇是數學的「形式」而已，演示解題時也是一樣，一步步非常嚴密，非常工整，每寫一行便問學生「懂不懂」，學生也非常合作「懂……」，這樣熱烈的上課情緒，應該是天衣無縫了，事實上，學生所看到的不是「路

該怎麼走」，他們祇看到了「粗黑的腳」，一旦沒有「粗黑的腳」在前面帶路，便覺陌生，我們所要求的方法是要學生有積極的參與感，一如農夫趕牛的方式，教師擔任著農夫的地位，而學生扮演著牛的角色，事實指明家的所在方向，然後讓學生走在前頭，而教師跟在後面，必要時再給予引導，不要有越俎代庖的現象發生。

二、隱藏推理：

幫助學生是老師重要的一種工作，這工作頗不容易，它需要時間、經驗、熱心以及正確的原則，當然，學生應該儘可能的獲得獨立工作的經驗，可是，如果他們獨立應付著問題得不到一點幫助或即使有點幫助卻很不夠，結果可能毫無進步；不過，教師若幫助過多，那麼，學生又將毫無所得，猶如祇看見父親的「粗黑的腳」，所以教師應幫助學生不太多也不太少，這樣，學生才能獲得這工作的合理部分。即使學生能力不夠，教師至少也應使他們有一點獨立工作的觀念，為了達到這目的，教師應直接而謹慎的幫助學生，教師應將自己站在學生的立場，看看學生的情形，試著去了解學生正在如何的思考，然後再指示下一個步驟，盡量隱藏一些推理，讓學生發展他們的推理能力，讓他們在一些簡單的推理過程中獲得信心，並引起強烈的參與感，除了明指歸向以外，再加上一些推理的隱藏，使他們不再把數學課當做神遊的時間；如此，經過長時間的推理訓練，使他們能夠擁有獨立自己解決問題的能力。

三、主動參與：（使學生主動參與）

國中生的年齡被一些心理學家稱之為「問題的年齡」，更有人稱之為「可怕的十幾歲兒童」，這是人生的暴風雨階段，祇要在家裡父母管教不當，過份峻厲苛刻或過於溺愛寬縱都是造成問題的原因，在學校方面，教師如果無法與學生建立

適宜的感情，無法使學生有主動對課業的參與感，這都是造成學生在學業上因成績跟不上而厭倦上學或逃學的主要緣故，尤其是數學這一科目，數學由於他有一個唬人的外表——數學的形式，使人望而生畏，不容易引起學生的學習興趣，所以在數學的教學過程中，特別要注意使學生能夠主動參與，不但如此，一個想學好數學的學生，祇聽教師講課，不見得比一個想學游泳的學生聽人談游泳的事來得有助益，光聽別人談游泳的技術，如何伸手？如何擺腿？如何換氣？你不能就因此而學會了游泳。同樣的，你也不能完全靠教師講述如何解一個方程式就學會了解方程式的技巧，縱然學會了也祇是皮毛而已，那麼光靠閱讀可以學好數學嗎？我以為不能，雖然閱讀比聽講佔優勢，因為閱讀較為積極，但也好不了多少，如果閱讀的時候把紙筆帶在身邊，這就好多了，這可說是跨向正確方向的一大步，不過學習數學最好的方式是在聽完一個問題的講述以後，模仿的做一次，再加上進一步的思考，如此才是最正確的方法，所以教師在上數學課時，要要求學生能夠主動的參與，使引起其對學習的強烈慾望。

四、具體舉例：

從具體到抽象是數學發展的一條大道，因此具體的例子往往是抽象概念的源泉，而所用的方法，往往是高深數學裡所用方法的依據，僅僅熟讀了抽象的定義和方法而不知道他們具體來源的數學學習者是沒有多大作為的，從數學的本身來說，它研究最基本的對象是數與形，因此幾何圖形所引出的幾何直覺和由數而引出來的具體關係和概念往往是數學中極豐富的源泉，數學家希爾伯特曾經說過：「要了解數學上某一理論，最好的方法是去找一個最富代表性的具體實例，然後把這個例子加以好好研究。」，一般學生，甚至於好學生，最大的毛病就是不實在，他們或許能

滔滔不絕的吐出一些定理的敘述，但是他們舉不出實例，找不出反例，我曾見過學生會解——兩數的和為五十，兩數的差為四十，試問兩數各為多少？但是他算不出——一個蘋果和一個蕃茄共五十元，一個蘋果比一個蕃茄貴四十元，試問一個蘋果和一個蕃茄的價格各多少？這就完全失去了學數學的意義，但教師確實也不可能完全用實例來教學，因為有些數學的形式如要與實際生活配合，確實需要經過高層次的思考，我們祇能要求教師們盡量的用實例來說明數學的形式，使能盡量使數學的形式發揮其實用的價值，因此，也能幫助學生了解數學的內涵，更能達成數學教育的目的。

討論完了如何教好國中數學以後，接著我們所要討論的是，國中生如何學好國中數學，同樣的，分項說明如下：

一、要珍惜以前所學的東西，養成穩紮穩打的習慣。

數學在文化的發達史上，啓蒙較早，它發展的主流是在人類要描述自然，甚至控制自然的需求下進行的，它為發展一套方法，使足以解決一大堆同一類型的問題，提供一般的工具，所以不得不訴之於一種形式；而發展一套理論（例如：小學時的時鐘問題，年齡問題，植樹問題，流水問題，行程問題，雞兔問題……等各種特殊問題。等到引入未知數 X 、 Y 及方程式的一般運算後，便融合成為所謂的一次聯立方程式的問題，一個人祇要學會後者，便能處理前者的所有各種問題），這理論的成果是前人一層層累積的產物，是人類共同創造的結晶，雖然藝術也是累積，也是反映時代，而藝術可以在某一時代，由某一個人，就其所處環境，所得的觀察或感受，落筆成畫，着刀為雕，而留下不朽的作品，但數學的工作者，卻不可能任何個人，或任何時代，演出暴發戶的姿態，

數學知識是累積的，任何個人若想避開目前已有的數學理論，而其所得的結果，到後來總會發覺祇是覆述前人的工作罷了。除了累積之外，要特別強調「數學的連貫性」也就是其嚴密推理的結果。例如：解一個因式分解的題目，如果我們對於多項式的四則運算有很少的知識或根本沒有知識，就根本不可能有很好的意見，好的意見基於過去的經驗和已有的知識。雖然僅僅過去的經驗不一定能得到好的意見，但我們不收集一些已有的經驗，也決不能有好的意見；僅僅有材料不能造好房子，但不去收集必要的材料也決不能造好房子，解決數學問題的必要材料是我們已有的數學知識有關的東西，所以學好數學的第一要件——珍惜以前所學的東西，養成穩紮穩打的習慣。

二、要養成解題的好習慣。

回答一個自己所不了解的問題是感癢的，爲了不是自己所希望的結果而工作更是苦惱的，但無論何時都存在著無數的人在回答著自己所不了解的問題，在爲自己所不希望的結果而工作著，這就是沒有了解問題所造成的損失，當你拿到一個問題時，所企望於知道的應該是已知數是什麼？未知數是什麼？而條件又是什麼？（未知數和已知數由什麼條件連繫著？），這是解題的第一步驟——了解問題。

當你了解問題以後，而一時不能解決時，不妨用下面的問句來問你自己：注視未知數！以前曾學過相同或相似未知數的熟問題嗎？知道什麼舊經驗有關的問題嗎？以前學過有關的問題你能應用它嗎？你能改變未知數或已知數，必要時改變兩者，使新未知數和新已知數更能互相接近嗎？這個問題你不能解決，一定有一個比這個稍微簡單而你仍不能解決的問題，你能找到它並解決它嗎？你用了所有已知數了嗎？你用了全部的條件了嗎？問題中所包含的一切重要觀念你都考慮到了

嗎？當我們了解問題後，必須去收集舊經驗有關的知識，然後想出一個計劃，所以解題的第二個步驟——想出一個計劃。

設計、構想以解決問題，這是不容易的，需要過去已有的知識，良好的思想習慣，以及對這問題的專注，此外還要一個要件——幸運，何謂幸運，就是偶然的發現，我們不能全賴幸運，但在任何問題的解決中，多少也有點發現，你的問題也許是平凡的，但若能引起你的好奇心，發揮你的發現精神，而你又用自己的方法去解決它，那麼，你就會經驗到興奮，享受到發現的喜悅，這個解題的計劃你永遠也忘不了，更忘不了那發現時的興奮與喜悅；相反的，這個計劃如果是參考解答或老師的權威使你接受的，你將會經驗到時常被忘掉的危險。當你想出一個計劃，緊接著就是實行計劃，實行計劃後還有一件很重要的事情就是校核解答，即使是優秀的學生，也往往實行計劃後，就看別個問題，這樣的做法，就失掉了這個工作重要而有益的一面，回顧整個解答，重新檢視答案以及思考得出答案的途徑，是可以充實自己解題知識，發展自己解題能力的，所以解題的第三個步驟——實行計劃並回顧整個解法且校核它。以上三個步驟看來似乎煩瑣些，可是愈複雜的問題，愈顯得解題習慣養成的重要，盲目的嘗試，祇是帶來更多失敗的煩惱，灰心將會抹去你解題的勇氣，所以學好數學的第二要件——要養成解題的好習慣。

三、要知其然並知其所以然。

台大黃武雄教授早在民國六十三年曾呼籲教師們「解題不能精彩，解題應平淡無奇，使學生不但知其然，更知其所以然。」在此我要呼籲親愛的同學們，不要一味的沈迷於參考書裡一些難題的特殊解法，所謂的特殊解法就是目前的中學教育深受升學主義的影響，參考書裡應付聯考數

學試題的零碎技巧，其解法非常妙，非常精彩，精彩得使你祇知道「是這樣」或者深一層知道「為什麼是這樣」，然而卻不知道「什麼動機來引導我們想出為什麼是這樣」，這個動機要能從題目找出來，或是由已知來引導才是好的解題方法，我們不能依賴幸運或頓悟，當你遇到一個不能解決的問題時，必須由問題的已知與未知去收集過去所學有關的問題，並動員和組織已有的知識和經驗，從不同的角度來觀察已知與未知，別忘了人類的優越感就在於遇到不能直接克服的障礙而能繞過障礙，繼續前進，一隻飛蟲想從玻璃窗內飛出來，祇是一再嘗試絕無希望的動作，而人類就更能幹了，由已知與未知再加上條件的推演，使已知與未知能更接近，使問題能更簡化，使自己能知道什麼動機來引導我們想出為什麼是這樣，這就是學好數學的第三個要件——要知其然並知其所以然。

四、將記憶的東西減至最少。

記憶的東西總會忘記，而聯考並不迫在明天，為了避免忘記所造成的煩惱，祇有將記憶的東西減至最少，一般在國中數學的學習過程中，所須記憶的大部是指公式，而記憶公式的最好方法就是理解與應用公式，一味記憶公式，祇是知道「是這樣」而明白公式的推演就是知道「為什麼是這樣」，至於一些更複雜的公式，我們不祇要知道「為什麼是這樣」而且還要知道「什麼動機來引導我們想出為什麼是這樣」，公式除了節省解題的時間外，別無用途，更非學數學的主要目的，何況聯考並不迫在明天，所以學好數學的第四個要件——用理解代替記憶，將記憶的東西減至最少。

綜上所論，國民中學數學的教與學，祇是筆者的一些意見，是否與實際的情形有所差距呢？尚待教師和學生實際的去做，本文一開始已先聲

明，筆者抱著「初生的犢兒不怕虎」的精神來討論這個問題，其實在數學王國裡，迂迴高閣，以符號為牆垣，將皇宮緊緊圍住，可望而不可及，論語有段話，深值吾人回味，子貢曰：「譬之宮牆，賜之牆也及肩，窺見家室之好，夫子之牆數仞，不得其門而入，不見宗廟之美，百宮之富，得其門者，或寡矣……」，由此句話，再看看今天數學教育的目標，我們相信而且深信，就數學本身的奧秘而言，或許可比之為「夫子之牆」，但就教育的目標，我們希望數學變成「賜之牆」使人可以窺而見之，使人少有畏懼之感，筆者早已過了國中階段，本著如果時光能夠倒流，我能再年輕一次的話，我將如何來學好國中數學，用以勉勵國中生們好好把握這消逝永不同的時光。墨子兼愛上篇曰：「聖人以治天下為事者也，必知亂之所自起，焉能治之，不知亂之所自起，則不能治！」，筆者以為「學生以治數學為事者也，必知數學之所自起，焉能治之，不知數學之所自起，則不能治！」因為每一數學的理論，及數學的形式，必有其問題的起源，這也是理論與實際配合的最好說明。最後筆者希望數學教育界的先進，本著自身豐富的教學經驗，發表一些有關國中數學教育的文章，以供年輕教師的參考，也使筆者此文能具體達成拋磚引玉的功效，是筆者最大的希望，也是數學教育界的福祉。 □

參考資料：

(一)How to Solve It. George Polya.

張憶壽譯。

(二)A Teacher is Many Things. Earl V.

Pullias James D. Young.

吳富恕譯。

(三)數學教室 董武雄教授著。

(四)數學傳播季刊。