高中幾何該教些什麼(下)

Irving Adler著——台北市立中正高中　林聰勤譯

八、種種技巧

上述的第三項目標是熟練一些技巧。在目前的高中幾何課程中，我們教的許多技巧都基於圖形全等、不等式、平行、相似和面積等概念。由於上述的幾何和代數有密切關係（參看上期本文之三、幾何的本質），我要建議在幾何課程中加入一些有關的代數技巧的訓練。下面，我列出三種對幾何有幫助的代數技巧：座標、向量和保距變換的代數。

1.座標的代數：S. M. S. G. 的書“座標幾何”或其他類似的書及相應的課程中，總是包含了一個單元有關這方面的教材，這些教材的內容通常限於下列三個課題：直線的方程式、線段中點的公式、兩點間的距離公式。我建議在這個單元中加入一個既單純、優美、又有用，而且容易引起學生共鳴的題材，即一直線的方向數（direction number），和它在檢驗直線的平行與垂直時的用法：當一直線 ℓ 的方程式爲 $ax+by=c$ 時，直線 ℓ 的方向數是一個比 $a:b$；若直線 ℓ' 的方程式爲 $a'x'+b'y'=c'$，則直線 ℓ 與 ℓ' 平行（重合也算平行）的充要條件是 $a:b=a':b'$，直線 ℓ 與 ℓ' 互相垂直的充要條件是 $aa'+bb'=0$。（註）

【譯者註】 直線 ℓ 的方向數為 $a:b$ 時，$-b/a$ 叫做直線 ℓ 的斜率（slope）。若直線 ℓ 與 ℓ' 的斜率依次為 m 與 m'，則 ℓ 與 ℓ' 平行（包括重合）的充要條件是 $m=m'$，ℓ 與 ℓ' 互相平行的充要條件是 $mm'=-1$。由此看來，要判斷平面上兩直線是否平行或互相垂直，斜率與方向數一樣好，甚至更單純些。

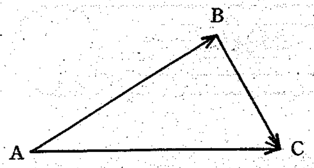
因為我國高中數學教材中，一定提到平面上直線的斜率，所以有些讀者會覺得平面上直線的方向數這個題材，並不需要。但方向數的好處，在於把問題推廣到3維空間中的平面時非常方便：3維空間中的平面 g 的方程式為 $ax+by+cz=d$ 時，連比 $a:b:c$ 叫做平面 g 的方向數；若平面 g' 的方向數為 $a':b':c'$，則 g 與 g' 平行（包括平行）的充要條件是 $a:b:c=a':b':c'$，g 與 g' 互相垂直的充要條件是 $aa'+bb'+cc'=0$。

設垂直於平面 g 而過原點的直線（垂直於平面 g 的直線叫做平面 g 的法線）與 x 軸，y 軸，z 軸的交角依次為 α，β，γ 時，則 $\cos\alpha=\frac{a}{R}$，$\cos\beta=\frac{b}{R}$，$\cos\gamma=\frac{c}{R}$，其中 $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$。所以，$\frac{a}{R}$，$\frac{b}{R}$，$\frac{c}{R}$ 這三個數又叫做平面 g 的方向餘弦（direction cosines）。

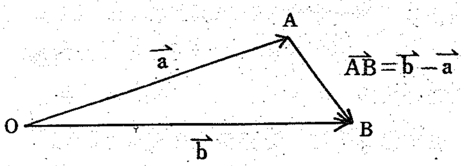
2.**向量的代數**：這是常在幾何課中被忽略的教材，我認爲應引入十年級（相當於我國的高一）的幾何課程中。我建議引入下列的題材（註）

〔**譯者註**〕本小節中所提的建議，目前我國高中教材都已採取。

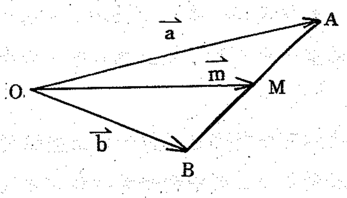
(1)向量加法的三角形法則：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

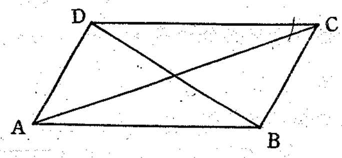


(2)一個點的位置向量的概念，與利用端點的位置向量來表示一向量的方式：設由A點的位置向量爲$\vec{a}$（即$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$），B點的位置向量爲$\vec{b}$，則$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$。



(3)一線段中點的向量表示法，與採用這個公式的幾何性證明：設M爲$\overline{AB}$的中點，又A點、B點與M點的位置向量依次爲$\vec{a}$、$\vec{b}$與$\vec{m}$，則$\vec{m}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$。下半的題材，可用平行四邊形





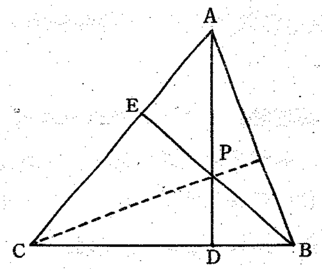
的兩對角線互相平分爲例說明如下。（見左下圖）

已知：設ABCD爲一平行四邊形。

求證：$\overline{BD}$的中點等於$\overline{AC}$的中點。

證明：因爲$\overline{AB}$和$\overline{DC}$相等而平行，故$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，或$\vec{b}-\vec{a}=\vec{c}-\vec{d}$。此式等號兩邊同加上$\vec{a}$和$\vec{d}$，得$\vec{b}+\vec{d}=\vec{a}+\vec{c}$，兩邊同乘上$\frac{1}{2}$，得$\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{d})=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c})$，即$\overline{BD}$中點的位置向量等於$\overline{AC}$中點的位置向量，換句話說，$\overline{BD}$的中點和$\overline{AC}$的中點重合。

(4)兩個向量的內積的觀念，內積的性質，以及利用內積的幾何性證明：當向量$\vec{a}$與$\vec{b}$的長依次爲$|\vec{a}|$與$|\vec{b}|$，而其夾角爲θ時，$\vec{a}$與$\vec{b}$的內積爲$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$。內積的主要性質爲滿足交換律$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$和分配律$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$以及可用以檢驗向量的垂直——當$\vec{a}$與$\vec{b}$均非零向量時，$\vec{a}$和$\vec{b}$互相垂直的充要條件爲$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$。幾何性的證明，可用三角形的三高共點爲例說明如下（見下圖）。



已知：ABC爲一個三角形，D點和E點依次在$\overline{BC}$與$\overline{AC}$上，且$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，$\overline{BE}\perp\overline{AC}$，又$\overline{AD}$和$\overline{BE}$交於P點。

求證：$\overline{CP}\perp\overline{BA}$。

證明：因$\overline{AP}\perp\overline{BC}$，故$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$。

因$\overline{BP}\perp\overline{CA}$，故$(\vec{p}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{c})=0$。

利用分配律將上兩式展開，可得

$$\vec{p}\cdot\vec{c}-\vec{p}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$$\vec{p}\cdot\vec{a}-\vec{p}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c}=0$$

上兩式相加，消去一些項後因式分解可得

$$(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$$

因 $\vec{p}-\vec{c}\neq\vec{0}$，$\vec{a}-\vec{b}\neq\vec{0}$，故上式表示 $\overrightarrow{CP}\perp\overline{BA}$。

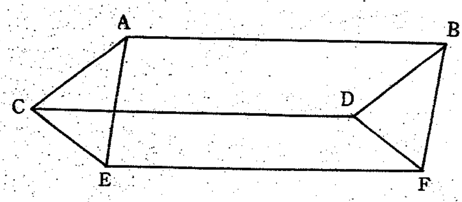
3.**保距變換的代數**：這是到目前為止，仍然為美國的數學課程改革運動所忽視的題材，但我認為它有許多有趣的地方，足以引起十年級學生的共鳴。下面，我們簡略的討論在保距變換下，能將幾何問題轉化成代數問題的一面。

當我們給平面上的每一點P，都配上關於該點的點鏡射 R_P 時，我們就得到平面上的點集合，與所有點鏡射的集合之間的一一對應。同理，當我們給平面上的每一直線 ℓ，都配上關於該直線的線鏡射 R_ℓ 時，我們就得到平面上的直線的集合，與所有線鏡射的集合之間的一一對應。

利用這兩種對應，我們能編排出一本對照表，把有關平面上的點和直線的幾何敘述，翻譯成有關平面上的點鏡射和線鏡射的代數敘述；反過來，也可把代數敘述翻譯成幾何敘述。下面是部份的對照表，詳情請參閱本文著者的書A new Look at Geometry（John Day Co. N. Y. 1966 出版）。

幾何敘述	代數敘述
P點在直線 ℓ 上	$R_P R_\ell = R_\ell R_P$
直線 ℓ 垂直於直線 ℓ'	$\ell\neq\ell'$，且 $R_\ell R_{\ell'} = R_{\ell'} R_\ell$
ℓ 是 $\overline{PQ}$ 的中分線	$R_P R_\ell = R_\ell R_Q$
M為AC的中點	$R_A R_M = R_M R_C$
$\overline{AB}=\overline{DC}$ 且 $\overline{AB}\parallel\overline{DC}$	$R_A R_B = R_D R_C$

我們可以利用這個對照表，把幾何問題轉化成代數問題，加以解決。下面舉個簡單實例作為說明。



已知：$\overline{AC}=\overline{BD}$，$\overline{AC}\parallel\overline{BD}$，$\overline{CE}=\overline{DF}$，$\overline{CE}\parallel\overline{DF}$

求證：$\overline{AE}=\overline{BF}$，$\overline{AE}\parallel\overline{BF}$。

證明：從左到右閱讀上面的簡略對照表的最後一列，把假設中的幾何敘述翻譯成兩個代數敘述如下：

$\overline{AC}=\overline{BD}$ 且 $\overline{AC}\parallel\overline{BD}$，即 $R_A R_C = R_B R_D$

$\overline{CE}=\overline{DF}$ 且 $\overline{CE}\parallel\overline{DF}$，即 $R_C R_E = R_D R_F$

把上面最右所得的兩個方程式相乘，可得

$$R_A R_C R_C R_E = R_B R_D R_D R_F$$

但我們注意到（參閱上期本文的前半）

$$R_C R_C = 1，R_D R_D = 1$$

所以上式可簡化成 $R_A R_E = R_B R_F$。再利用簡略對照表的最後一列翻譯回去，得 $\overline{AE}=\overline{BF}$ 且 $\overline{AE}\parallel\overline{BF}$。

九、批判性的思考

上述的第四項目標是發展批判性的思考。為了能夠朝這個目標進行，我們首先應正視下列事實：能由一組假設出發，作演繹性的論證，並不等於能作批判性的思考。事實上，如果學生只曉得由公認常用的假設所演繹得到的一組討論，他就會很容易掉入一種思考陷阱，認為這個結論「必需是真的」，而不只是「此假設的推論結果」而已。這樣，演繹推論只會助長他的教條式的武斷思考，而不是批判式的思考。

真正的批判式的思考，要求學生尊重「假設對演繹得到的結論所加的條件限制」，即他應該理解到結論的真實性是依賴於所用到的假設，如

果我們改變了假設，演繹得到的結論將有所改變。

闡明此精神的一個有效方式是借用幾何的公設：如果我們把歐氏空間的公設改變爲雙曲幾何的公設，則隨著原公設而來的一些結論也會改變；例如，在歐氏幾何中有「三角形三內角和爲 180° 」的結論，在雙曲幾何中變成了「三角形三內角和小於 180° 」。

爲此理由，我認爲在十年級的幾何中，引入介紹雙曲幾何的簡短單元是有其必要的，而且這樣做並不太費時間——在雙曲幾何中，慢慢地引出「三角形的三內角和小於 180°」所需的一系列教材並不會超過兩星期（註：美國中學的數學課每週一定爲 5 節課。又正文的最後一句話，可參閱Maiers的文章 " The Introduction to Non-Euclidean Geometry ", The Mathematics Teacher, 1964年十一月號）。

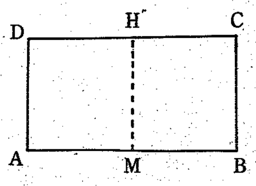
要得到雙曲幾何的公設，我們只要把希爾伯特所給的歐氏幾何公設組中的平行公設，改成「過所給的直線外一點，可作兩條以上的直線平行於該直線」即可（註：歐氏幾何的公設假定這樣的直線「存在而且只有一條」），所有其他的公設照樣可用在雙曲幾何上。單用這些公設，而不用到平行公設或其代替品就可推得的結果，是歐氏幾何和雙曲幾何共同的定理。波利亞把這些公設和定理合起來命名爲「絕對幾何」(absolute geometry)。

我認爲十年級的幾何應該由絕對幾何開始，然後指出我們可在平行公設或其代替品中做一抉擇，並對每一抉擇所導致的結果加以探討。但是，我們只對雙曲幾何方面作非常簡略的探討，而把重點放在歐氏幾何方面。

目前，十年級的幾何課程中有許多教材都屬於絕對幾何的範圍。我認爲我們應該加以指明，這些屬於絕對幾何的結果，並不需要用到平行公設或其代用品就可證得。譬如說， AAS 定理「若兩個三角形的兩內角，與其中一角的對邊對應相等，則此兩三角形全等」就屬於絕對幾何的範圍。但不幸的，許多幾何教本都隱藏這個事實，即使用三角形的內角和爲 180° 的定理來加以證明，使人誤以爲 AAS 定理需依賴平行公設才能證明。順便提一下，歐氏在他的原本中並沒有犯這種錯誤，即其證明沒有用到平行公設或其結果。由此可見，有時候回頭向歐氏學習，可以改進我們的幾何教學。

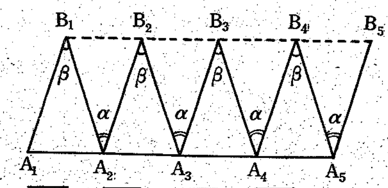
在絕對幾何的單元中，除了那些目前出現在幾何教本中的題材外，我建議加入兩個不但在觀念上很重要，而且在幾何發展史中扮演重要角色的題材：1.用以敘述沙卡里(Saccheri)四邊形基本性質的定理，2.駱根德(Legendre)定理「三角形的內角和小於或等於兩直角」。

1.若四邊形ABCD中有$\overline{DA}\perp\overline{AB}$，$\overline{CB}\perp\overline{AB}$且$\overline{DA}=\overline{CB}$，則稱爲沙氏四邊形，如下圖所示。設H與M依次爲$\overline{DC}$與$\overline{AB}$的中點。不難證得$\overline{MH}\perp\overline{DC}$，$\overline{MH}\perp\overline{AB}$，且$\angle D=\angle C$。$\angle D$與$\angle C$叫做沙氏四邊形的頂角。由此我們可作下列三種假設：(a)頂角是銳角，(b)頂角是直角，(c)頂角是鈍角。



假設(a)，導致雙曲幾何；假設(b)，導致歐氏幾何；假設(c)，與絕對幾何相矛盾，所以必須加以排除（只在歐氏幾何公設所規定的直線概念，經過下列修改後，假設(c)才會導致橢圓幾何：直線上的點沒有線性的次序關係，而有循環性的次序關係)。

2.學生只有在明白了駱根德定理的證明之後，才能體會到阿基米德公設的重要性。駱氏對此定理作了許多有名的證明，下面列出其中之一（參看下圖）。



已知：$\overline{A_1A_2}=\overline{A_2A_3}=\overline{A_3A_4}=\overline{A_4A_5}\cdots\cdots$

$\triangle A_1A_2B_1\cong\triangle A_2A_3B_2\cong\triangle A_3A_4B_3\cong\triangle A_4A_5B_4\cong\cdots\cdots$

$\triangle B_1B_2A_2\cong\triangle B_2B_3A_3\cong\triangle B_3B_4A_4\cong\triangle B_4B_5A_5\cong\cdots\cdots$

求證：$\beta\leq\alpha$。

證明：利用歸謬法，導得矛盾。假定$\beta>\alpha$，則 $\overline{A_1A_2}>\overline{B_1B_2}$，或$\overline{A_1A_2}-\overline{B_1B_2}>0$

又$A_1B_1B_2B_3B_4B_5A_5>\overline{A_1A_5}$

即 $\overline{A_1B_1}+4\overline{B_1B_2}+\overline{B_5A_5}>4\overline{A_1A_2}$

或 $2\overline{A_1B_1}>4(\overline{A_1A_2}-\overline{B_1B_2})$

同理可證得 $2\overline{A_1B_1}>n(\overline{A_1A_2}-\overline{B_1B_2})$

上式對任意的正整數n都成立（只要把上圖繼續向右多畫幾個全等的三角形）。換句話說，$\overline{A_1A_2}-\overline{B_1B_2}$ 的任意倍都無法超越過 $2\overline{A_1B_1}$。這個結論與絕對幾何中的所謂阿基米德公設相矛盾，此公設說：不管多小的一個線段，只要倍數夠大，就可超過給定的任一線段的長（實際上，阿基米德的說法是，你能以很小的脚步，走完一個任意長的距離，只要你走的步數夠多）。

十、數學模式的本質

前述的第五項目標是促進學生對數學模式的瞭解。為了達成此目標，我們應與學生一起研討「歐氏空間是眞實物理空間的一個數學模式」的意義。

因為歐氏幾何是眞實物理空間的一個模式，所以我們能在教室中從事幾何性的實驗，並用歸納的方式得到一些歐氏幾何的命題。這個事實就是幾何的"實驗教學法"的基礎，此種教學法在美國已經流行了數十年之久。不幸的是，由於一般人對歸納法與演繹論證法的性質，在觀念上有所誤解，教師在使用實驗教學法時，經常造成學生對教材的混淆，而非透澈的理解。下面列舉一些常犯的誤解。

1 有些教師錯誤地把歸納法歸結為證明一個一般法則的一種方法。例如，S. M. S. G. 小組所編寫的坐標幾何書中第5頁所提的歸納法的觀念，就犯了此種錯誤。當然，這種觀點顯然是不正確的，因為由一些特例所引出的一般法則之所以能夠成立，依賴於我們能毫無例外地加以證實，每一種可能的情況（或例子）都能滿足此一般法則。

在典型的幾何實驗中，可能的情況其數目是無限的，因此無法一一加以檢驗。例如，若要以實驗方式驗證「等腰三角形的兩底角相等」，我們可以畫出幾百萬個大大小小，偏的尖的等腰三角形，加以精密的測量後，得到這些等腰三角形的兩底角都（在誤差許可的範圍內）概略相等的結論。但這種做法並不能幫助我們，對那些無限多個沒畫出來的等腰三角形作任何結論。換句話說，我們不能因此而下「每一個等腰三角形的兩底角一定相等」的結論。

那麼，在這個實驗中所得的觀察結果，和「等腰三角形的兩底角一定相等」這個一般法則的成立之間，有怎樣的邏輯關係呢？此問題的正確答案是，此實驗的觀察結果並不證明此一般法則的成立，反而是此一般法則的成立說明了，為什麼我們會得到這樣的觀察結果。說得清楚就是，由於歐氏幾何是眞實物理空間的相當良好的一個數學模式，所以此一般法則在歐氏幾何中的成立，使我們在實驗中會觀察到，我們所畫的每一個等腰三角形的特例，其兩底角都在使用的儀器的誤差所許可的範圍內相等。

2. 有些教師正確地指出，一些特例不能證明一個一般法則的成立，但却從這個事實越份的得出「演繹論證法遠比歸納法優越」的錯誤結論。這些人的論點是，歸納法只能確定一個對所觀察過的有限特例成立的定理，但演繹法則能確定一個對任何情況都能成立的定理。

這種論點顯示了論者對演繹法本質的無知或完全的誤解。事實上，用演繹法證得一個定理，絕不表示此定理一定為真。我們只能說，此定理是所用到的那些公設的必然結果。換句話說，此定理的是否為眞是有條件的，即在公設為眞的條件下，此定理方才為眞。

那麼，演繹法和歸納法的本質是什麼？而其間的關係又如何呢？

(1)演繹法與結論的眞或假無關，只與由假設推到結論的過程是否正確有關。演繹法一定有個前提（即數學中稱之為公理、公設或以前證過的定理），演繹法只說明在某些前提下，可以推得一些必然的後果。

(2)在歸納法中，我們從一組敍述出發，然後設法尋找能夠用演繹法導出這些敍述的一些前提。然而我們也不斷言這些前提是否為眞，我們只能說所給的敍述使這些前提看起來是眞的。有時候，對於同一組敍述我們可以找到幾組不同的前提，這些不同的前提都能推得這組敍述。此時，我們可以在這些不同的前提中作一抉擇。

(3)因此，演繹法與歸納法在步驟上而言是相反的：演繹法由前提導出結論，而歸納法則反過來，要找出可以得到所給結論的前提。在兩者之中，前提都可推到結論，但結論未必能推到前提。注意到，兩者步驟上雖是相反，但歸納法的過程中要使用到演繹法，因為我們要檢查所找出的前提，是否能演繹推得原給的結論。

學生瞭解了演繹法和歸納法的本質之後，對於「歐氏幾何是眞實物理空間的一個數學模式」的意義，就較易於明白。歐氏幾何所以會是眞實物理空間的一個數學模式的理由有下列四點：

①歐氏幾何中的每一個不定義名詞與定義的名詞，都與物理實物相關聯。

②歐氏幾何的公設表達出一些不定義名詞中的某種假定的關係。

③歐氏幾何中的定理都是由公設推出來的，這些定理進一步表達了一些不定義名詞與定義名詞之間的其他關係。

④如果把歐氏幾何中的這些公設與定理，轉換成相應的物理實物之間的關係，則這些關係都可以實驗的方式加以驗證為概略正確的。

由此看來，要達成上述的第五項目標，我們必需消除有關演繹法和歸納法本質的誤解。

十一、高中幾何應教些什麼——總結

本文根據我對幾何本質的了解，提出我認為適當的高中幾何的教學目標，按照這些目標，對目前高中幾何課程的教材作了批評，並建議了一些具體的修訂意見。透過這個方式，我希望能回答本文標題所提出的問題「高中幾何應教些什麼？」下面，我把所建議的事項列出來，作為本文的結尾：

1. 對平面上的次序和分隔方面的性質，採取演繹性那樣重的直觀處理，而且對面積教材也不要從事太過形式化的處理方式，以節省教學時間。

2. 介紹一個單元的保距變換。

3. 對代數性的技巧給予更多的注意。

4. 介紹一個單元的雙曲幾何。

5. 改正有關歸納法和演繹法本質方面的誤解。

上述的第 5 項建議，我認為是必須的。至於第 2、第 3 與第 4 項建議，我認為頗值得一試，當然在選材與表達方面，要相當的留意。第 1 項建議則是為了能節省時間，使這些增加的教材能夠納入高中幾何的課程。□