國立政治大學　　應用數學系

從最小平方法到共點線

薛昭雄

（一）

在高中甚或國中數學的幾何教材中，常常接觸到下面的結果：

若 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，$P_3(x_3, y_3)$ 三點共線，

$$\text{則} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

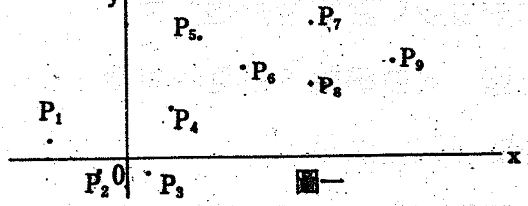
自然地，我們可問下列這樣的問題：

若已知 n 點（$n \geq 3$）$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，……，$P_n(x_n, y_n)$ 共線，那麼這 n 點共線是什麼呢？

這個問題，當然是上述結果的推廣，如果我們得出了 n 點的結果，那麼令 $n=3$ 就可以得到上述的結果了。

（二）

讓我們先看看下列 n 點 $P_i(x_i, y_i)$（$i=1, 2, \ldots\ldots, n$），就如同圖一所示。

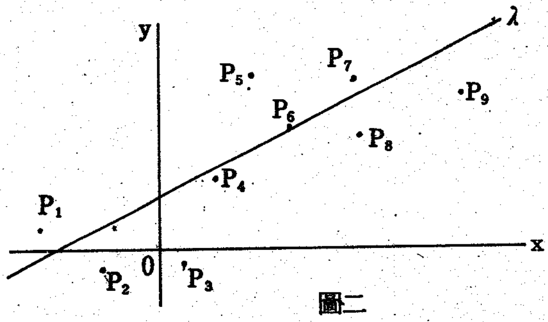


圖一

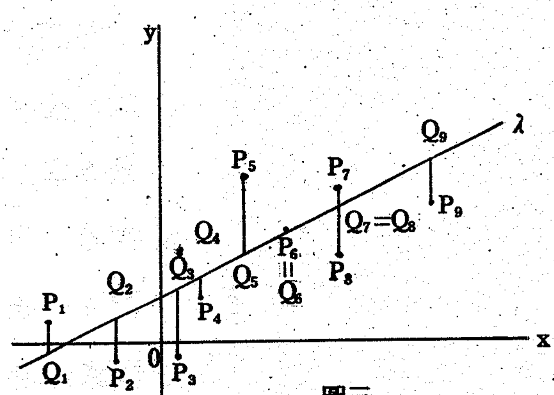
在圖中，我們僅畫出了九點。

我們現在的問題是：對於這 n 個已知點，有沒有一套方法找出一條直線使得這條直線“最適合”這 n 個點？當然我們還未約定“最適合”是什麼意義。一般來說，只要“最適合”一約定，我們就可以找到這一條直線，因此這個問題的答案是肯定。

現在看下面的圖二與圖三：



圖二



圖三

這兒Q_1，Q_2，…，分別是P_1，P_2，…，在直線λ上的對應點，這種對應點是過P_i（$i=1$，2，…，n）作y軸的平行線即可得。如果我們規定"最適合"的意思是使$\overline{P_1Q_1}^2+\overline{P_2Q_2}^2+\cdots+\overline{P_nQ_n}^2$爲最小，那麼我們即得到一般所謂的最小平方法。

令$P_i(x_i,y_i)$（$i=1,2,\cdots,n$）表n個點，試求p，q之值使$y=px+q$爲最適合這些n個點。

顯然Q_i的坐標爲$Q_i(x_i,px_i+q)$，因此

$$\overline{P_1Q_1}^2+\overline{P_2Q_2}^2+\cdots+\overline{P_nQ_n}^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(y_i-px_i-q)^2$$

令

$$S=\sum_{i=1}^{n}(y_i-px_i-q)^2\text{，則}$$

$$S\geq 0$$

其中$S=0$之充要條件是這n點剛好在直線$y=px+q$上，也就是這n點共線了，但一般來說，S不常爲0。

由上述"最適合"的約定，我們知道我們的問題是求p與q之值使S爲極小。

求S的極小可以用微積分來處理它。像這裡，我們只要對p與q分別偏微分即可。但在高中裡，也許這不是理想的方法，下面可以提供不用微積分的方法。

令$z_i=y_i-px_i$，則

$$S=\sum_{i=1}^{n}(z_i-q)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}z_i^2-2q\sum_{i=1}^{n}z_i+nq^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}z_i^2+n\Big(q^2-\frac{2q}{n}\sum_{i=1}^{n}z_i\Big)$$

若令$\bar z=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}z_i$（$\bar z$就是$z_1,z_2,\cdots,z_n$的均值），則

$$S=\sum_{i=1}^{n}z_i^2+n(q^2-2q\bar z)$$

$$=n(q-\bar z)^2+\sum_{i=1}^{n}z_i^2-n\bar z^2 \quad\cdots\cdots(1)$$

在式(1)的右端中，$S_1=\sum_{i=1}^{n}z_i^2-n\bar z^2$不含q項，即可視爲定值，因此欲使S爲極小，則必須

$$n(q-\bar z)^2=0$$

$$\text{或 } q=\bar z=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}z_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-px_i) \quad(2)$$

但S_1實際上含p項，即

$$S_1=\sum_{i=1}^{n}(y_i-px_i)^2-n\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-px_i)\Big)^2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

令

$$\bar x=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \qquad \bar y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$$

則

$$S_1=\sum_{i=1}^{n}y_i^2-2p\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+p^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n(\bar y^2-2p\bar x\bar y+p^2\bar x^2)$$

$$=p^2\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar x^2\Big)$$

$$-2p\Big(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar x\bar y\Big)$$

$$+\Big(\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\bar y^2\Big) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

爲了簡化式(4)，我們利用下列的統計學符號（不熟悉統計學並不影響整段的瞭解）。

令

$$S_{xy}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar x\bar y$$

$$S_{xx}=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar x^2$$

則式(4)即可寫成

$$S_1=p^2S_{xx}-2PS_{xy}+S_{yy} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

如果 $S_{xx}=0$，則式(5)是 p 的二次三項式，但是 S_{xx} 會不會等於 0 呢？首先我們看 $S_{xx}=0$ 的可能

因

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\bar{x}\sum_{i=1}^{n}x_i+n\bar{x}^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2\right)=\frac{1}{n}S_{xx}$$

故得

$$S_{xx}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

於是 $S_{xx}=0$ 的充要條件即是 $x_i=\bar{x}$　$i=1$，2，…，n，也是說 $x_1=x_2=\cdots=x_n$。

同時，由式(6)即得 $S_{xx}>0$。

既然 S_{xx} 可能為 0，也可能為正，因此下面將就這二方面來加以討論：

(i) $S_{xx}=0$ 的情形

在 $S_{xx}=0$ 的情形下，式(5)成為

$$S_1=-2PS_{xy}+S_{yy}$$

但

$$S_{xy}=\sum_{i=1}^{n}\bar{x}y_i-n\bar{x}\bar{y}$$

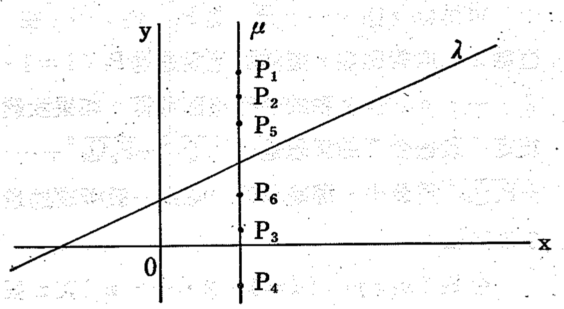
$$=\bar{x}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i-n\bar{y}\right)=0$$

故

$$S_1=S_{xy}$$

因為上式與 p 無關，故當 p 為任意數值，q 為 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-px_i)=\bar{y}-p\bar{x}$ 時，$y=px+q$ 為對應於這 n 點的最適合直線。

下列圖四即為這種情形的圖示。



圖四

(ii) $S_{xx}\neq 0$

若 $S_{xx}\neq 0$，則可將式(5)改寫成

$$S_1=S_{xx}\left(p^2-\frac{2S_{xy}}{S_{xx}}p+\frac{S_{yy}}{S_{xx}}\right)$$

$$=S_{xx}\left(\left(p-\frac{S_{xy}}{S_{xx}}\right)^2+\frac{S_{xx}S_{yy}-S_{xy}^2}{S_{xx}^2}\right)$$

$$=S_{xx}\left(p-\frac{S_{xy}}{S_{xx}}\right)^2+\frac{S_{xx}S_{yy}-S_{xy}^2}{S_{xx}}$$

因 $S_{xx}>0$，所以當 $p=\frac{S_{xy}}{S_{xx}}$ 時，$S_1=\frac{S_{xx}S_{yy}-S_{xy}^2}{S_{xx}}$ 為極小值。

由以上的討論，我們可結論為：

定理 1

若 $P_i(x_i, y_i)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 為已知 n 點 $(n\geq 3)$，並設 x_i 均不等，則對應於這些 n 點之最適合直線為

$$y=px+q,$$

其中

$$p=\frac{S_{xy}}{S_{xx}} \qquad q=\bar{y}-\frac{S_{xy}}{S_{xx}}\bar{x}$$

而其與 P_i 垂直距離平方和為 $\frac{S_{xx}S_{yy}-S_{xy}^2}{S_{xx}}$

由定理 2,即容易證得下述共點線定理。

定理 2

若 $P_i(x_i, y_i)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 為已知 n 點 $(n\geq 3)$，則 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 共線

的充要條件為

$$S_{xx}S_{yy}=S_{xy}^2$$

例：下列是計程車舊車資與新車資的對應表

x	y
15	16
18	20
21	24
24	28
27	32
⋮	⋮

問這些點（15，16），（18，20），（21，24），…是否共線？又適合它們的直線方程式是什麼？

解：為了方便起見，取 n＝3 即（15，16），（18，20），（21，24），因此

x	y	xy	x^2	y^2
15	16	240	225	256
18	20	360	324	400
21	24	504	441	576
		1104	990	1232

$\bar{x}=18 \quad \bar{y}=20$

故 $S_{xx}=990-3\cdot18^2=18$

$S_{yy}=1232-3\cdot20^2=32$

$S_{xy}=1104-3\cdot18\cdot20=24$

因 $S_{xy}^2=24\cdot24=576$

$S_{xx}S_{yy}=18\cdot32=576$

故 $S_{xy}^2=S_{xx}S_{yy}$

由定理 2 知此 3 點共線。

又

$$p=\frac{S_{xy}}{S_{xx}}=\frac{24}{18}=\frac{4}{3}$$

$$q=\bar{y}-\frac{S_{xy}}{S_{xx}}\bar{x}=20-\frac{4}{3}\cdot18=-4$$

故由定理 1 知它們適合的直線為

$$y=\frac{4}{3}x-4$$

利用上述方程式可知任意 n 點均可在此直線上，因只需將座標代入即可也，或者再試 n 為任意值也可。

（三）

上述是提供了基本統計學的方法來處理的問題，事實上，上述的討論也可以考慮平行距離（即過 P_i 作 x 軸平行線交直線於 Q_i，求 $\sum\overline{P_iQ_i}^2$ 為極小）來處理，讀者可仿上述的方法來補充。當然，證明共點線的條件應該不是只有上述的一種，這篇短文希望提供一些有興趣的朋友作為參考。

後記

也許讀者會覺得上述辨別 n 點共線的方法太過抽象（太笨？），如果考慮先取二點，作出一條直線方程式來，再將欲辨別的點代入該直線方程式，即可瞭解是否共線了。這當然是一種方法，但個人覺得已失去本文的動機了。

（上接第 24 頁）

3. Mary B. Rowe, Reflections on Wait-Time : Some Methodological Questions. Journal of Research in Science Teaching 11(3):263-279, 1974.

4. Mary B. Rowe, Relations of Wait-Time and Rewards to the Development of Language, Logic, Fate Control : Part II: Rewards., Journal of Research in Science Teaching 11(4) : 291-308, 1974.

5. Robert B. Sund and Leslie W. Trowbridge, Teaching Science by Inquiry in the Secondary School. 2nd ed., 1973, Charles E. Merril Publishing Company, Columbus, Ohio,