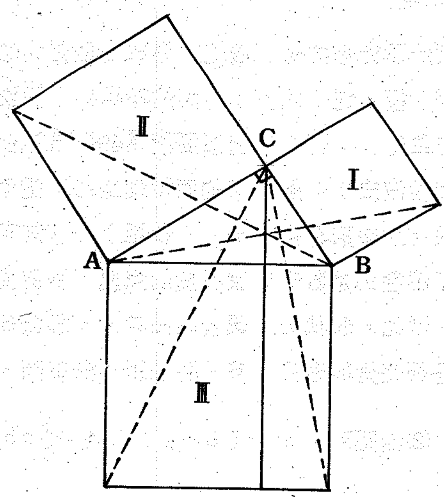
專欄　國立臺灣師範大學　數學系

剪貼、拼湊商高定理的證明

洪萬生

中學數學教科書上有關商高定理（或畢氏定理）的證明，比較常見的有面積證法及比例證法，都出自古希臘數學家歐幾里得的幾何原本。現在，則有人倡議使用弦圖證明。所謂「弦圖」，是源自我



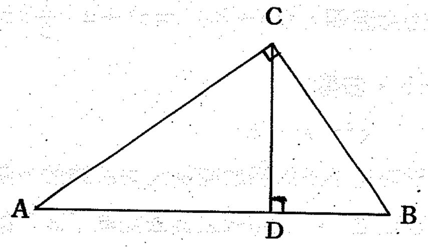
圖一　面積證法

應用全等形原理和面積理論

證明：正方形面積

Ⅰ＋Ⅱ＝Ⅲ

即 $AC^2+BC^2=AB^2$



圖二　比例證法

應用相似三角形原理可知：

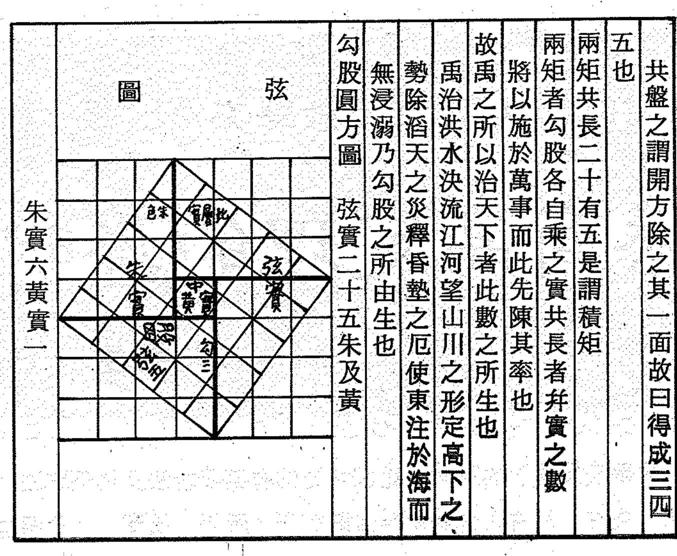
$AB : AC = AC : AD$

$AB : BC = BC : BD$

$\Rightarrow AC^2+BC^2=AB\times AD+AB\times BD$

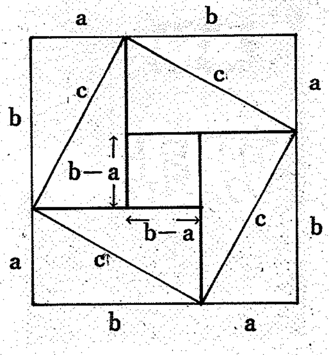
$=AB^2$

國古代天文著作周髀算經的一幅插圖。該書成於東漢初期，其後屢經傳抄，至唐代始有定本，原始的作者已不可考。三國時代的數學家趙君卿注釋該書時曾言明「依經爲圖」，因此，「弦圖」或可能是他所繪製的。



圖三　周髀算經的弦圖

至遲在紀元 1213 年或稍後（南宋）即已出現



圖四　弦圖證明(一)

$$(a+b)^2=c^2+4\cdot\frac{1}{2}ab$$

$$\Rightarrow a^2+b^2=c^2$$

應用弦圖以證明商高定理的方法大致可分爲下列三種形式：

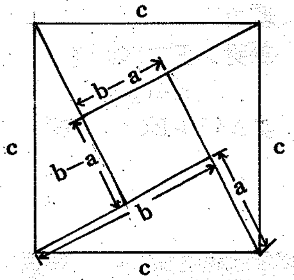
(1)由圖四，$(a+b)^2=c^2+4\cdot\frac{1}{2}ab$，消去 $2ab$，即得

$$c^2=a^2+b^2$$

這個構想是不是周朝的商高大夫所繪的，無法確定。理由之一：殷商史籍到底記載了商高的事蹟沒有，至今仍是懸案，何況古人假托聖賢之名寫僞書的興趣一直很大；理由之二：此構想是亞力偉烈對照圖三翻譯周髀經文時所推求得到的，後再經李約瑟巨著中國之科學與文明之傳誦，乃廣爲人所知。這一段經文：「故折矩以爲句廣三（按古字句與勾同），股脩四，徑隅五，既方其外，半之一矩，環而共盤，得成三、四、五，兩矩共長二十有五，是謂積矩。」經亞力偉烈翻譯成（以下括號內按語是李約瑟所加）：「因此，讓我們來切開矩形（沿對角線），使它寬 3（單位），長 4（單位），那麼它兩個對頂角之間的對角線便會長 5（單位）。現在，在這個對角線上作一個正方形，然後把割剩在外面的半矩形，各加到此正方形的每一邊上，構成一個更大的（正方形）板。這（四個）外面的半矩形（面積爲24平方單位），而（把它以面積爲49平方單位的正方形板減去），剩下來的面積就是25。這個方法叫做『把矩形積聚起來』（積矩）。」其可靠性與正確性仍是數學史家討論的焦點，目前尚無定論。因此，即使史上眞有商高其人，那麼他的構想是否完全與圖四相符，恐怕也不無疑問。

(2)由圖五，$c^2=(b-a)^2+4\cdot\frac{1}{2}ab$，消去 $2ab$，即得

$$c^2=a^2+b^2$$



圖五　弦圖證明(二)

$$c^2=(b-a)^2+4\cdot\frac{1}{2}ab\Rightarrow c^2=a^2+b^2$$

這個證明構想顯然是趙君卿所提出來的，他注釋周髀算經時曾說：「句股各自乘，并之爲弦實，開方除之即弦。案弦圖又可以句股相乘爲朱實二，倍之爲朱實四，以句股之差自相乘爲中黃實，加差實亦成弦實。」就足以說明他早已認識到：

等式 $c^2=(b-a)^2+4\cdot\frac{1}{2}ab$ 與 $c^2=a^2+b^2$

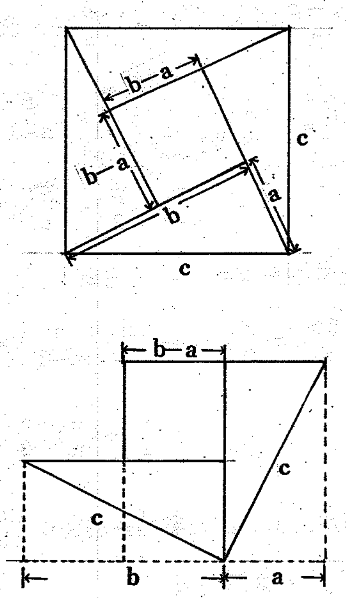
本質上是等價的。不過，他並沒有明確地指出：

由 $c^2=(b-a)^2+4\cdot\frac{1}{2}ab$ 可以代數地或幾何地立即推得 $c^2=a^2+b^2$，因此，我們不能認定他「證明」了商高定理。

從幾何代數的角度來看，$c^2=(b-a)^2+4\cdot\frac{1}{2}ab$ 與 $c^2=a^2+b^2$ 所代表的幾何意義是一致的，這暗示：以弦圖爲基礎，通過剪貼、拼湊來證明商高定理是可行的。

⑶把圖五剪開拼成圖六，由於剪、拼並不改變面積，故得證

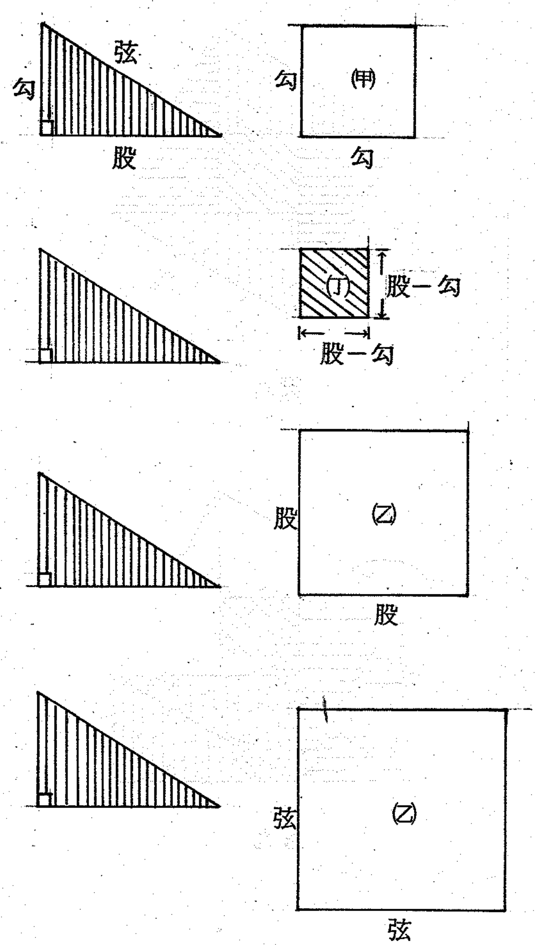
$$c^2=a^2+b^2$$



圖六　弦圖證明㈢

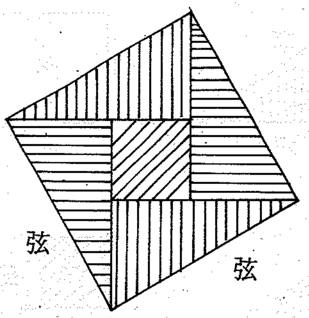
這是12世紀印度數學家巴斯卡拉所提出來的證明，是數學史上有關畢氏定理最簡潔、最漂亮的一種證法。其實，三國時代稍後於趙君卿的數學家劉徽對此種「剪拼法」的證明也頗爲擅長，再者，在巴斯卡拉的著作中也可以找到中國數學的影子，所以，我們並不排除巴斯卡拉向中國學習的可能性，不過，也不能過份熱切地肯定，因爲還缺乏具有說服力的證據。

以上第⑴、⑵種證法屬於代數法，學過乘法公式才能接受，第⑶種則純是幾何方法，只須對面積的概念有一點點認識就可以學習了。底下，我們嘗試把巴斯卡拉的證法重新設計，希望小學生也能輕易地理解。

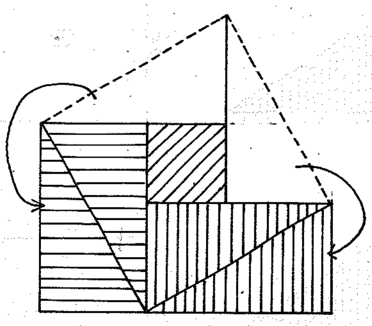


圖七

在厚紙板（用木板更好）上剪下四個大小形狀一樣的直角三角形（塗上紅色），並剪下以此直角三角形的正方形（共三個），及以直角三角形兩股差爲邊長的正方形（塗上黃色），如圖七所示。現在，把四個直角三角形拼到最大的(丙)正方形（邊長爲直角三角形的斜邊），再將（最小）塗上黃色的(丁)正方形塡補上其中空位置，如圖八所示。然後，把圖八拼成圖九，此時丙正方形拼成一種如圖九的"曲尺"形（我國古代稱"矩"形）。最後，把正方形(甲)、(乙)排到圖九上，則恰好能將圖九完全疊合，即證明正方形(丙)經過剪、拼可以成爲正方形(甲)、(乙)的組合，也就是說，弦的平方等於勾的平方與股的平方之和。



圖八



圖九

應用類似上述這種簡易、直觀且幼童都能操作的手法，我們還能「證明」很多深刻的幾何定理。讀者應該可以自行嘗試其他的方法，比如應用摺紙、積木等等來進行幾何證明。至於這樣的「手法」到底有沒有資格進入教科書的殿堂，恐怕是見仁見智的問題吧！撫今憶往，數學史家李伯雷赫說過的一句話：「一個數學原理，絕不因爲不是應用（嚴密的）演譯法推證得到的，就不具有一般性。」實在發人深省，讓我們一起關心摺紙"證明"的可行性吧！

（上接第48頁）

$$(1+x)^{\beta} \leftrightarrow (\binom{\beta}{n})$$

一方面由函數與數列對應的關係 $(1+x)^{\alpha+\beta} \leftrightarrow (\binom{\alpha+\beta}{n})$，一方面由同構的關係

$$(1+x)^{\alpha+\beta}=(1+x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} \leftrightarrow (\binom{\alpha}{n})$$

$*(\binom{\beta}{n})$，而因對應是1對1的，所以

$(\binom{\alpha+\beta}{n})=(\binom{\alpha}{n})*(\binom{\beta}{n})$，或寫成

$$\binom{\alpha+\beta}{n}=\binom{\alpha}{0}\binom{\beta}{n}+\binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{n-1}+\cdots\cdots$$

$$+\binom{\alpha}{n-1}\binom{\beta}{1}+\binom{\alpha}{n}\binom{\beta}{0}$$

在上式中令 $\alpha=\beta=n$，得到

$$\binom{2n}{n}=\binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\cdots\cdots$$

$$+\binom{n}{n-1}\binom{n}{1}+\binom{n}{n}\binom{n}{0}$$

再利用二項式的係數的對稱性：$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$，我們得到

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}。$$