

如何以不同的內容模式 解答學生的問題

張靜譽

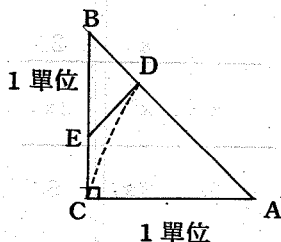
在教室上數學課，常常會遇到，同學們舉手說：「老師！我不懂！」請問，這時候你怎麼辦？多數情況下，同學們不需要更多相同的解釋，同學們需要基於不同內容模式的不同的解釋。所謂內容模式，就是數學內容表現的方式。

內容模式，分成圖形的、符號的、語意的和行為的四種，前三種在數學教學上顯得特別重要。傳統上數學教室裡使用最多的是符號的內容模式。換言之，我們長期停留在符號的模式，而忽視了圖形的和語意的模式。數學概念的解釋，應該三者——語意的、符號的和圖形的兼顧。

舉例說明如後：

例1 $\sqrt{2}$ 是無理數

(一)用圖形來證明 $\sqrt{2}$ 為無理數，畫一個等腰直角三角形，兩腰長各為一個單位。由畢氏定理知斜邊AB長為 $\sqrt{2}$ 個單位。假設有一長為 $\frac{1}{n}$ （其中n為整數）的線段，使得兩股和弦可共度量。（可供度量就是兩股和弦可用共同的度量單位



量盡。兩股用 $\frac{1}{n}$ 可共度量，因為長1的線段為n

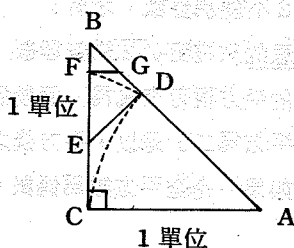
個 $\frac{1}{n}$ ，假設 $\sqrt{2}$ 也可共度量，相當於假設有在有一

一整數m，使得弦長為 $m \times \frac{1}{n}$ ，即 $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$ 。因

此假設可共度量，相當於假設 $\sqrt{2}$ 為無理數）

開始在AB上取AD使得AD=AC，因AB和AC可共度量，DB也可共度量。

畫DE垂直AB於D， $DE \cong CE$ 且 $DE \cong DB$ ，又因CB和CE可共度量，故BE可共度量，而且 $BE < BC$ ，因 $BE + EC = BC$ ，在EB上取EF



使得 $EF \cong DE$ 。因EB和EF可共度量，BF必可共度量，而且 $BF < BE < BC$ ，注意 $\triangle BFG$ 相似於原 $\triangle ABC$ 。重複如此步驟，得到一串愈來愈短的可共度量的線段 $BC > BE > BF > \dots$

而這些線段都是 $\frac{1}{n}$ 的整數倍。但如上述步驟不停地重複下去，我們可造得一可共度量線段，小到

任意小。特別，能造一可共度量線段比 $\frac{1}{n}$ 還小，

而與前述其應為 $\frac{1}{n}$ 的整數倍的條件產生矛盾，如此矛盾出在1和 $\sqrt{2}$ 可共度量的假設，所以 $\sqrt{2}$ 必為無理數。

(一)用符號來證明 $\sqrt{2}$ 為無理數

1 設 $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ 為最簡分數，即 $(n, m) = 1$

$$2 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$\text{所以 } \frac{n}{m} = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{n} \right).$$

3 因 $\frac{n}{m}$ 為最簡分數必存在一整數 k ，使得

$$\frac{m}{2n} = \frac{k_n}{k_m} \text{ 即 } m = k_n \text{ (且 } 2n = k_m \text{)}$$

4 則 $\frac{m}{n} = k$ ，即 $\sqrt{2}$ 為整數。

5 但是 $1 < \sqrt{2} < 2$ ，因 $1^2 < 2$ 而且 $2 < 2^2$ 。

6 故 $\sqrt{2}$ 不能為整數，矛盾。

(二)用語意的來證明 $\sqrt{2}$ 為無理數

假設二的平方根可表成一個最簡之分數，則此分數的平方為二，是以，平方後之分數的分子為偶數。如果一完全平方數為偶數，必可讓四整除。

如果平方後的分數的值為二，且分子可被四整除，則分母必至少含一個二的因素，但是如果分子和分母均可被二整除，分數就不是最簡分數，和一開始的假設矛盾，所以二的平方根不能表為一分數。

例2 分數

圖形的



$$\frac{1}{2}$$

符號的

語意的

二分之一



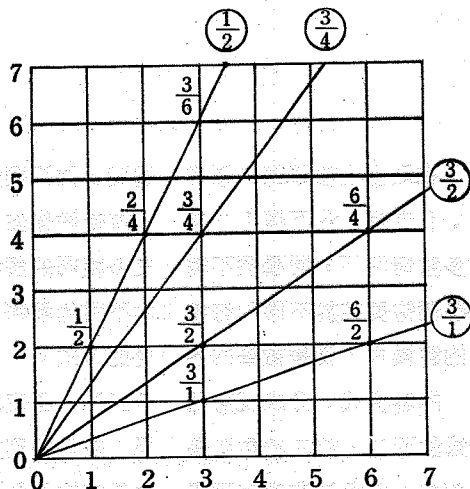
$$\frac{1}{2}$$

二分之一



$$\frac{3}{4}$$

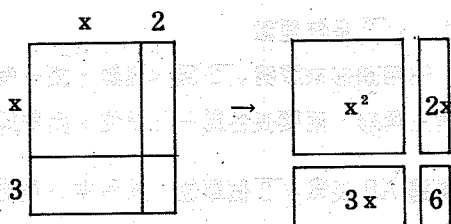
四分之三



等價分數圖形的表示

例3 $(x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6$

圖形的



	x	2
x	x^2	$2x$
3	$3x$	6

符號的

$\begin{array}{r} x+2 \\ \times) x+3 \\ \hline \end{array}$	類似	$\begin{array}{r} 32 \\ \times) 21 \\ \hline \end{array}$	→	$\begin{array}{r} 30+2 \\ \times) 20+1 \\ \hline \end{array}$	→	$\begin{array}{r} x+a \\ \times) y+b \\ \hline \end{array}$
而		$\begin{array}{r} 32 \\ 21 \\ \hline 32 \\ 64 \\ \hline 672 \end{array}$		$\begin{array}{r} 30+2 \\ 20+1 \\ \hline 30+2 \\ 600+40 \\ \hline 600+70+2 \end{array}$		$\begin{array}{r} x+2 \\ x+3 \\ \hline 3x+6 \\ x^2+2x \\ \hline x^2+5x+6 \end{array}$

語意的

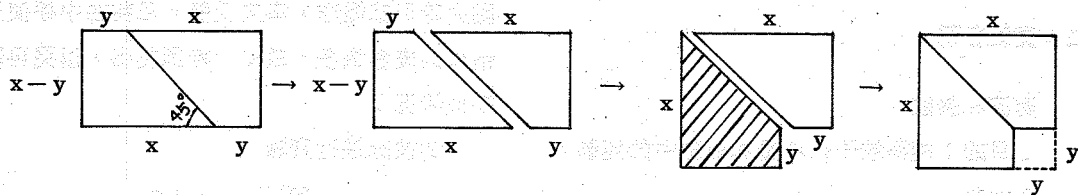
代數上二項式的意義是形如 $a+b$ 的表示式，一數具有兩相加的成分。這句話意謂數有兩種看法：單一的數或兩部份的和。兩個這樣的數相乘時，一個看成單一的數去乘另一個看成和的數

，而且利用乘對加可分配。

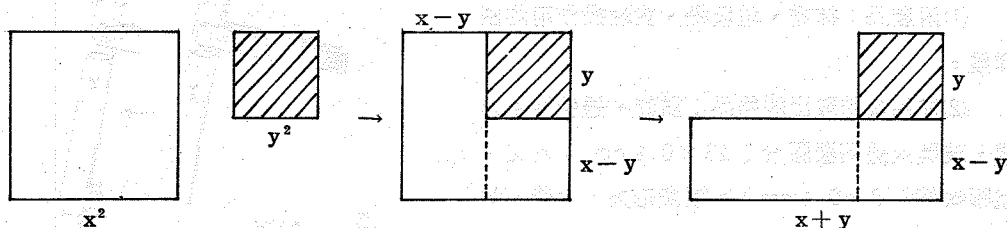
$(x+2) \times (x+3)$ 的過程為 $x(x+3) + 2(x+3)$ ，再將原來看成單一數的 $x+3$ 換成看成兩成份的和，再一次使用分配律，得 $x^2 + 3x + 2x + 6$ 或 $x^2 + 5x + 6$

例4 $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ 或 $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$

圖形的解釋為

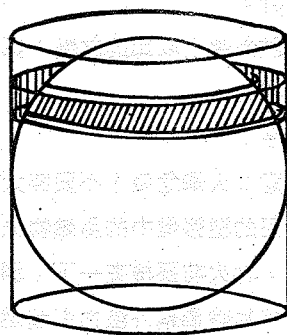


或



例5 球的表面積和體積

阿基米得 (Archimedes) 發現垂直於圓柱軸的一對平行平面截球面和柱面相等的面積。因此，球表面和柱側面有相同的面積，今半徑為 r 的圓柱側面面積為 $2r\pi \times 2r = 4\pi r^2$ ，所以球表面積為 $4\pi r^2$ 。



(下接第 59 頁)

同心協助，使本縣自然科學教育有

更大的成效。

(六)自製教具優勝作品一覽表：

名 次	作 品 名 稱	作 者	校 名
第一名	電學綜合實驗板	陳 德 昌	美 濃 國 中
"	國中生物科課外讀物輔助教材	羅 穎 彤	彌 陀 國 中
第二名	磁場與電場觀察裝置	黃 榮 堯	鳳 山 國 中
"	蛋膜的通透性真好	張 美 花	甲 仙 國 中
"	等速率圓周運動向心力簡易測量裝置	董 振 華	六 龜 國 中
第三名	電流磁效應	楊 幸 瑜	仁 武 國 中
"	粒子概念解說模型	陳 國 賢	前 峯 國 中
"	植物貯藏養分之研究	葉 文 興	圓 富 國 中

(七)研習報告書優勝作者一覽表：

等 第	組 別	名 稱	撰寫報告人	服務學校
優 等	生 物 組	逢機選擇與非逢機選擇	蔡 中 信	永安國中
甲 等	生 物 組	蛋膜的通透性真好	李 春 明	文山國中
"	生 物 組	血球切片標本自製	周 道 男	大洲國中
"	理 化 A 組	磁場與電場觀察裝置	姚 昭 銘	林園國中
"	理 化 B 組	空氣對流器	李 雙 興	岡山國中
"	理 化 A 組	三極電晶體實驗器	蔡 漢 鐘	五甲國中

(上接第 35 頁)

將球想像成由許多小四角錐堆積而成頂點在球心，底面積
合並成球表面積，圖中表其中四個。

每一四角錐高 r ，如果四角錐足夠小，可將底看成平坦的

，每一個四角錐體積為 $\frac{1}{3}$ (底面積) $\times r$ ，所以球體積為

$$\frac{1}{3} \times 4\pi r^2 \times r = \frac{4}{3} \pi r^3。$$

