專欄　省立高雄師範學院　數學系

某些函數與數列的對應關係及其應用

穆瑟

一些函數在某一領域內能展開成冪級數：

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n，(|x|<r)$$

譬如常數函數 1 能寫成

$$1=1+0x+0x^2+\cdots\cdots，$$

單位函數 x 能寫成

$$x=0+1x+0x^2+0x^3+\cdots\cdots，$$

函數 $\frac{1}{1-x}$ 在 $|x|<1$ 的領域內能展成幾何級數：

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x^n，$$

而函數 $(1+x)^\alpha$ 能展開成

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n，$$

這裡 $\binom{\alpha}{0}=1$，

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\cdots n}$$

$n>0$

對於這一類的函數，利用其冪級數的係數我們可以得到一個數列 $(a_n)=(a_0，a_1，a_2，\cdots\cdots)$，從而建立起函數 f 與數列 (a_n) 間的對應關係，如：

$$1\leftrightarrow(1，0，0，0，\cdots\cdots)，$$

$$x\leftrightarrow(0，1，0，0，\cdots\cdots)，$$

$$\frac{1}{1-x}\leftrightarrow(1，1，1，1，\cdots\cdots)，$$

$$(1+x)^\alpha\leftrightarrow\left(\binom{\alpha}{0}，\binom{\alpha}{1}，\binom{\alpha}{2}，\cdots\cdots\right)$$

等等。這種對應很明顯地是 1 對 1 的對應，就是說，若

$$f\leftrightarrow(a_n)，g\leftrightarrow(a_n)$$

則 $f=g$

另外我們可看出，若

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n，(|x|<r)$$

c 是常數則

$$(cf)(x)=c\cdot f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(ca_n)x^n$$

$$(|x|<r)$$

又若 $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n，(|x|<r)$ 則

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$$

$$(|x|<r)。$$

因此，我們若定義常數 c 和數列 (a_n) 相乘爲

$$c\cdot(a_n)=(ca_n)$$

數列 (a_n) 和 (b_n) 相加爲

$$(a_n)+(b_n)=(a_n+b_n)$$

就會有"若 $f\leftrightarrow(a_n)$，$g\leftrightarrow(b_n)$ 則 $cf\leftrightarrow c\cdot(a_n)$，而 $f+g\leftrightarrow(a_n)+(b_n)$"的結果。換言之，函數 $c\cdot f$ 所對應的數列恰是 c 乘 f 所對應的數列，而兩函數和所對應的數列正好是兩函數所對應數列的和。進一步我們再看看如何定義兩數列的乘法使得兩函數的積所對應的數列會是兩函數對應的數列的積。因爲

$$\begin{aligned}(f\cdot g)(x)&=f(x)\cdot g(x)\\&=(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)\\&\quad(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots)\\&=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+\\&\quad(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2\\&\quad+\cdots\cdots\end{aligned}$$

若 c_n 是 x^n 的係數，則 $c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$ 。所以我們定義兩數列的"褶積"爲 $(a_n)*(b_n)=(c_n)$，其中 $c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$。如此一來就有"若 $f\leftrightarrow(a_n)$，$g\leftrightarrow(b_n)$ 則 $f\cdot g\leftrightarrow(a_n)*(b_n)$ "的性質了。藉著這種對應的關係，我們可將函數和他對應的數列看成是"完全一樣"，函數有的性質必在他對應的數列上表現出來，反之亦然。這種方式的認同是數學上常有的情形。下面我們以兩個例子來看這種認同在處理一些問題上的便利。

例1 求 $\binom{0}{k}+\binom{1}{k}+\binom{2}{k}+\cdots+\binom{p}{k}$ 之和，這裡 p、k 均爲正整數。

解 固定 p，令 $A_k=\binom{0}{k}+\binom{1}{k}+\cdots+\binom{p}{k}$

$$=\sum_{n=0}^{p}\binom{n}{k}$$

由前面看過的對應關係可知若能找出數列 (A_m) 對應的函數的冪級數表示法，便可得到 A_k 了。（注意，當 $m>p$ 時，$A_m=0$）

我們將數列 (A_m) 對應的函數 $\sum_{m=0}^{\infty}A_mx^m$ 展開得到：

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty}A_mx^m&=\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{p}\binom{n}{m}\Big)x^m\\&=\sum_{n=0}^{p}\Big(\sum_{m=0}^{\infty}\binom{n}{m}x^m\Big)\\&=\sum_{n=0}^{p}(1+x)^n\\&=\frac{(1+x)^{p+1}-1}{(1+x)-1}\\&=\frac{1}{x}\Big\{\sum_{r=0}^{p+1}\binom{p+1}{r}x^r-1\Big\}\\&=\sum_{r=1}^{p+1}\binom{p+1}{r}x^{r-1}\\&=\sum_{k=0}^{p}\binom{p+1}{k+1}x^k\end{aligned}$$

比較 x^k 的係數，得到 $A_k=\binom{p+1}{k+1}$，亦即

$$\binom{0}{k}+\binom{1}{k}+\cdots\cdots+\binom{p}{k}=\binom{p+1}{k+1}$$

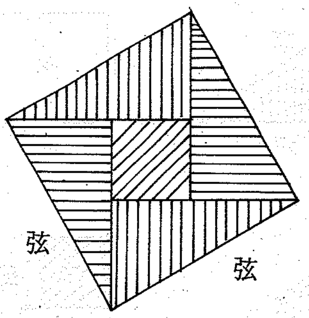
例2 求函數 $(1+x)^n$ 展開式中各係數的平方和。（亦即求 $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2$ 之和）

解 前面已經看過 $\binom{\alpha}{n}$ 是 $(1+x)^\alpha$ 展開式中 x^n 之係數。故

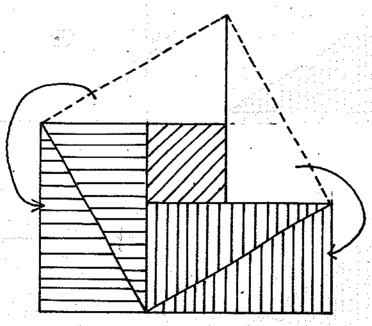
$(1+x)^\alpha\leftrightarrow(\binom{\alpha}{n})$，而

（下接第 28 頁）

在厚紙板（用木板更好）上剪下四個大小形狀一樣的直角三角形（塗上紅色），並剪下以此直角三角形的正方形（共三個），及以直角三角形兩股差爲邊長的正方形（塗上黃色），如圖七所示。現在，把四個直角三角形拼到最大的(丙)正方形（邊長爲直角三角形的斜邊），再將（最小）塗上黃色的(丁)正方形塡補上其中空位置，如圖八所示。然後，把圖八拼成圖九，此時丙正方形拼成一種如圖九的"曲尺"形（我國古代稱"矩"形）。最後，把正方形(甲)、(乙)排到圖九上，則恰好能將圖九完全疊合，即證明正方形(丙)經過剪、拼可以成爲正方形(甲)、(乙)的組合，也就是說，弦的平方等於勾的平方與股的平方之和。



圖八



圖九

應用類似上述這種簡易、直觀且幼童都能操作的手法，我們還能「證明」很多深刻的幾何定理。讀者應該可以自行嘗試其他的方法，比如應用摺紙、積木等等來進行幾何證明。至於這樣的「手法」到底有沒有資格進入教科書的殿堂，恐怕是見仁見智的問題吧！撫今憶往，數學史家李伯雷赫說過的一句話：「一個數學原理，絕不因爲不是應用（嚴密的）演譯法推證得到的，就不具有一般性。」實在發人深省，讓我們一起關心摺紙"證明"的可行性吧！

（上接第48頁）

$$(1+x)^{\beta} \leftrightarrow \left(\binom{\beta}{n}\right)$$

一方面由函數與數列對應的關係 $(1+x)^{\alpha+\beta} \leftrightarrow \left(\binom{\alpha+\beta}{n}\right)$，一方面由同構的關係

$$(1+x)^{\alpha+\beta}=(1+x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} \leftrightarrow \left(\binom{\alpha}{n}\right) * \left(\binom{\beta}{n}\right)$$

，而因對應是 1 對 1 的，所以

$$\left(\binom{\alpha+\beta}{n}\right)=\left(\binom{\alpha}{n}\right) * \left(\binom{\beta}{n}\right)$$

，或寫成

$$\binom{\alpha+\beta}{n}=\binom{\alpha}{0}\binom{\beta}{n}+\binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{n-1}+\cdots\cdots+\binom{\alpha}{n-1}\binom{\beta}{1}+\binom{\alpha}{n}\binom{\beta}{0}$$

在上式中令 $\alpha=\beta=n$，得到

$$\binom{2n}{n}=\binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\cdots\cdots+\binom{n}{n-1}\binom{n}{1}+\binom{n}{n}\binom{n}{0}$$

再利用二項式的係數的對稱性：$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$，我們得到

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}。$$