專欄 省立高雄師範學院 數學系

二項式係數的一些計算

周景文

下面介紹用二項式定理求一些二項式係數和的方法，最後並列出一些較簡單之練習。

A、

(a) $\binom{n}{0}+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+\binom{n}{12}+\cdots\binom{n}{4r}$，$4r\leq n<4r+4$

(b) $\binom{n}{1}+\binom{n}{5}+\binom{n}{9}+\binom{n}{13}+\cdots+\binom{n}{4r+1}$，$n\geq 1$，$4r+1\leq n<4r+5$

(c) $\binom{n}{2}+\binom{n}{6}+\binom{n}{10}+\binom{n}{14}+\cdots+\binom{n}{4r+2}$，$n\geq 2$，$4r+2\leq n<4r+6$

(d) $\binom{n}{3}+\binom{n}{7}+\binom{n}{11}+\binom{n}{15}+\cdots+\binom{n}{4r+3}$，$n\geq 3$，$4r+3\leq n<4r+7$

解法：我們知道如果 $i=\sqrt{-1}$，則 $i^2=-1$，$i^3=-i$，$i^4=1$，$i^5=i$，… 一般有

$$i^k=\begin{cases}1 & 如\ k=4\ell\\ i & 如\ k=4\ell+1\\ -1 & 如\ k=4\ell+2\\ -i & 如\ k=4\ell+3\end{cases}$$

所以以二項式定理來計算 $(1+1)^n$，$(1+i)^n$，$(1-1)^n$ 及 $(1-i)^n$，可分別得到

(1) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$

(2) $\binom{n}{0}+i\binom{n}{1}-\binom{n}{2}-i\binom{n}{3}+\cdots+i^n\binom{n}{n}=(1+i)^n$

(3) $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=\begin{cases}0 & 如\ n>0\\ 1 & 如\ n=0\end{cases}$

(4) $\binom{n}{0}-i\binom{n}{1}-\binom{n}{2}+i\binom{n}{3}+\cdots+(-i)^n\binom{n}{n}=(1-i)^n$

這四個式子相加後再除以4，我們可得到

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+\cdots\cdots=\begin{cases}\dfrac{2^n+(1+i)^n+(1-i)^n}{4} & 如\ n>0\\ 1 & 如\ n=0\end{cases}$$

我們希望再簡化以上答案。把 $1+i$ 與 $1-i$ 寫

爲三角式

$$1+i=\sqrt{2}\,(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$$

$$1-i=\sqrt{2}\,(\cos 45^\circ-i\sin 45^\circ)$$

由De Moirve 定理有

$$(1+i)^n=(\sqrt{2})^n(\cos n\cdot 45^\circ+i\sin n\cdot 45^\circ)$$

$$(1-i)^n=(\sqrt{2})^n(\cos n\cdot 45^\circ-i\sin n\cdot 45^\circ)$$

所以 $(1+i)^n+(1-i)^n$

$$=2(\sqrt{2})^n\cos n\cdot 45^\circ$$

$$=2^{\frac{n+2}{2}}\cos n\cdot 45^\circ$$

而 $$\cos n\cdot 45^\circ=\begin{cases}1 & \text{如 } n=8k\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{如 } n=8k\pm1\\ 0 & \text{如 } n=8k\pm2\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{如 } n=8k\pm3\\ -1 & \text{如 } n=8k+4\end{cases}$$

所以如 $n\geq 1$ 我們有

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+\cdots\cdots$$

$$=\begin{cases}2^{n-2}+2^{\frac{n-2}{2}} & \text{如 } n=8k\\ 2^{n-2}+2^{\frac{n-3}{2}} & \text{如 } n=8k\pm1\\ 2^{n-2} & \text{如 } n=8k\pm2\\ 2^{n-2}-2^{\frac{n-3}{2}} & \text{如 } n=8k\pm3\\ 2^{n-2}-2^{\frac{n-2}{2}} & \text{如 } n=8k+4\end{cases}$$

以上是(a)之計算。現再計算(b)。我們分別以 1，$-i$，-1 及 i 乘(1)，(2)，(3)及(4)後再相加。因 $n\geq 1$，所以有

$$4\left\{\binom{n}{1}+\binom{n}{5}+\binom{n}{9}+\cdots\right\}$$

$$=2^n-i(1+i)^n+i(1-i)^n$$

類似(a)計算，有

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{5}+\binom{n}{9}+\cdots$$

$$=2^{n-2}+2^{\frac{n-2}{2}}\sin n\cdot 45^\circ$$

$$=\begin{cases}2^{n-2} & \text{如 } n=8k \text{ 或 } n=8k+4\\ 2^{n-2}+2^{\frac{n-3}{2}} & \text{如 } n=8k+1 \text{ 或 } n=8k+3\\ 2^{n-2}+2^{\frac{n-2}{2}} & \text{如 } n=8k+2\\ 2^{n-2}-2^{\frac{n-3}{2}} & \text{如 } n=8k-1 \text{ 或 } n=8k-3\\ 2^{n-2}-2^{\frac{n-2}{2}} & \text{如 } n=8k-2\end{cases}$$

對於(c)之計算，以 1，-1，1 及 -1 分別乘(1)，(2)，(3)及(4)後再相加，有

$$4\left\{\binom{n}{2}+\binom{n}{6}+\binom{n}{10}+\cdots\right\}$$

$$=2^n-(1+i)^n-(1-i)^n$$

類似前計算，有

$$\binom{n}{2}+\binom{n}{6}+\binom{n}{10}+\cdots$$

$$=2^{n-2}-2^{\frac{n-2}{2}}\cos n\cdot 45^\circ$$

$$=\begin{cases}2^{n-2}-2^{\frac{n-2}{2}} & \text{如 } n=8k\\ 2^{n-2}-2^{\frac{n-3}{2}} & \text{如 } n=8k\pm1\\ 2^{n-2} & \text{如 } n=8k\pm2\\ 2^{n-2}+2^{\frac{n-3}{2}} & \text{如 } n=8k\pm3\\ 2^{n-2}+2^{\frac{n-2}{2}} & \text{如 } n=8k+4\end{cases}$$

最後對於(d)之計算，以1，i，−1及−i 分別乘(1)，(2)，(3)及(4)後再相加，有

$$4\left\{\binom{n}{3}+\binom{n}{7}+\binom{n}{11}+\cdots\right\}$$

$$=2^n+i(1+i)^n-i(1-i)^n$$

類似前計算，我們有

$$\binom{n}{3}+\binom{n}{7}+\binom{n}{11}+\cdots$$

$$=2^{n-2}-2^{\frac{n-2}{2}}\sin n\cdot 45^\circ$$

$$=\begin{cases} 2^{n-2} & \text{如 } n=8k \text{ 或 } n=8k+4 \\ 2^{n-2}-2^{\frac{n-3}{2}} & \text{如 } n=8k+1 \text{ 或 } n=8k+3 \\ 2^{n-2}-2^{\frac{n-2}{2}} & \text{如 } n=8k+2 \\ 2^{n-2}+2^{\frac{n-3}{2}} & \text{如 } n=8k-1 \text{ 或 } n=8k-3 \\ 2^{n-2}+2^{\frac{n-2}{2}} & \text{如 } n=8k-2 \end{cases}$$

B、

(e) $\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\binom{n}{9}+\cdots+\binom{n}{3r}$，$3r\leq n<3r+3$

(f) $\binom{n}{1}+\binom{n}{4}+\binom{n}{7}+\binom{n}{10}+\cdots+\binom{n}{3r+1}$，$n\geq 1$，$3r+1\leq n<3r+4$

(g) $\binom{n}{2}+\binom{n}{5}+\binom{n}{8}+\binom{n}{11}+\cdots+\binom{n}{3r+2}$，$n\geq 2$，$3r+2\leq n<3r+5$

解法：B項之解法可參考A項之解法。在A項計算中，利用1之四次方根1，i，−1，−i 、 ，現利用1之三次方根1，$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ 及 $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

令 $\omega=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ 則 $\omega^2=(-1-i\sqrt{3})/2$

進而有 $1+\omega+\omega^2=0$ 且有

$$\omega^k=\begin{cases} 1 & \text{如 } k=3\ell \\ \omega & \text{如 } k=3\ell+1 \\ \omega^2 & \text{如 } k=3\ell+2 \end{cases}$$

以二項式定理來展開 $(1+1)^n$，$(1+\omega)^n$ 及 $(1+\omega^2)^n$，有

(5) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$

(6) $\binom{n}{0}+\omega\binom{n}{1}+\omega^2\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots+\omega^n\binom{n}{n}=(1+\omega)^n$

(7) $\binom{n}{0}+\omega^2\binom{n}{1}+\omega\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots+\omega^{2n}\binom{n}{n}=(1+\omega^2)^n$

上三式相加，有

$$3\left\{\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\cdots\right\}$$

$$=2^n+(1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n$$

現寫 $1+\omega$ 及 $1+\omega^2$ 爲三角式

$$1+\omega=(1+i\sqrt{3})/2=$$
$$=\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ$$
$$1+\omega^2=(1-i\sqrt{3})/2$$
$$=\cos 60^\circ-i\sin 60^\circ$$

利用De Moirve's 公式，可有

$$(1+\omega)^n=\cos n\cdot 60^\circ+i\sin n\cdot 60^\circ$$
$$(1+\omega^2)^n=\cos n\cdot 60^\circ-i\sin n\cdot 60^\circ$$

所以 $2^n+(1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n$

$=2^n+2\cos n\cdot 60^\circ$

$$\cos n\cdot 60^\circ=\begin{cases}1 & \text{如} n=6k\\ \frac{1}{2} & \text{如} n=6k\pm 1\\ -\frac{1}{2} & \text{如} n=6k\pm 2\\ -1 & \text{如} n=6k+3\end{cases}$$

所以 $\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\cdots$

$$=\frac{1}{3}(2^n+2\cos n\cdot 60^\circ)$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{3}(2^n+2) & \text{如} n=6k\\ \frac{1}{3}(2^n+1) & \text{如} n=6k\pm 1\\ \frac{1}{3}(2^n-1) & \text{如} n=6k+2\\ \frac{1}{3}(2^n-2) & \text{如} n=6k+3\end{cases}$$

以上是(e)之計算，現計算(f)：以 1，ω^2 及 ω 分別乘(5)，(6)及(7)後相加，可得

$$3\left\{\binom{n}{1}+\binom{n}{4}+\binom{n}{7}+\cdots\right\}$$

$$=2^n+\omega^2(1+\omega)^n+\omega(1+\omega^2)^n$$

因 $1+\omega+\omega^2=0$，有 $\omega^2=-(1+\omega)$ 及 $\omega=-(1+\omega^2)$ 所以

$$\omega^2(1+\omega)^n=-(1+\omega)^{n+1}$$

$$=-\cos(n+1)60^\circ-i\sin(n+1)60^\circ$$

$$\omega(1+\omega^2)^n=-(1+\omega^2)^{n+1}$$

$$=-\cos(n+1)60^\circ+i\sin(n+1)60^\circ$$

因此 $2^n+\omega^2(1+\omega)^n+\omega(1+\omega^2)^n$

$$=2^n-2\cos(n+1)60^\circ$$

所以

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{4}+\binom{n}{7}+\cdots$$

$$=\frac{1}{3}\{2^n-2\cos(n+1)60^\circ\}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{3}(2^n-1) & \text{如} n=6k \text{ 或 } n=6k-2\\ \frac{1}{3}(2^n+1) & \text{如} n=6k+1 \text{ 或 } n=6k+3\\ \frac{1}{3}(2^n+2) & \text{如} n=6k+2\\ \frac{1}{3}(2^n-2) & \text{如} n=6k-1.\end{cases}$$

最後計算(g)：以 1，ω 及 ω^2 分別乘(5)，(6)及(7)後再相加，有

$$3\left\{\binom{n}{2}+\binom{n}{5}+\binom{n}{8}+\cdots\right\}$$

$$=2^n+\omega(1+\omega)^n+\omega^2(1+\omega^2)^n$$

類似前計算，可有

$$\binom{n}{2}+\binom{n}{5}+\binom{n}{8}+\cdots$$

$$=\frac{1}{3}(2^n+2\cos(n+2)60^\circ)$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{3}(2^n-1) & \text{如} n=6k \text{ 或 } n=6k+2\\ \frac{1}{3}(2^n-2) & \text{如} n=6k+1\\ \frac{1}{3}(2^n+1) & \text{如} n=6k+3 \text{ 或 } n=6k-1\\ \frac{1}{3}(2^n+2) & \text{如} n=6k-2\end{cases}$$

C、試求下列二和

(h) $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\binom{n}{6}+\cdots+\binom{n}{2r}$，$2r\leq n<2r+2$

(i) $\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\binom{n}{7}+\cdots+\binom{n}{2r+1}$，$n\geq 1$，$2r+1\leq n<2r+3$