專欄　省立高雄師範學院　數學系

無理數

上苑

凡一數可表為兩整數 a 與 $b \neq 0$ 的商：$\frac{a}{b}$，稱此數為有理數。一個不是有理數的實數稱為無理數。

如 $\sqrt{2}$ 是無理數。因設 $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$，在此 a，b 是整數且 $b \neq 0$，則 $a^2=2b^2$。但可整除 a^2 的 2 的最高次乘冪是偶數而可整除 $2b^2$ 的 2 的最高次乘冪是奇數，故與"唯一分解定理"（The unigue factorization theorem）矛盾。因此，$\sqrt{2}$ 是無理數。

本文主要介紹一些常見的無理數，先述下列引理。

引理 1　設具有整係數的多項方程式

(1)　$C_nX^n+C_{n-1}X^{n-1}+\cdots\cdots+C_1X+C_0=0$，$C_n \neq 0$，

有非 0 的有理數解，在此 $(a, b)=1$，則 $a \mid C_0$ 且 $b \mid C_n$

證明　將(1)中的 X 代以 $\frac{a}{b}$，並乘以 b^{n-1}，得

$$\frac{c_na^n}{b}=-c_{n-1}a^{n-1}-\cdots-c_1ab^{n-2}-c_0b^{n-1}$$

上式右端是整數，因此 $\frac{c_na^n}{b}$ 是整數，但 $(a, b)=1$，故 $b \mid c_n$。同理，將(1)中的 X 代以 $\frac{a}{b}$，並乘以 $\frac{b^n}{a}$，得

$$\frac{c_0b^n}{a}=-c_na^{n-1}-c_{n-1}a^{n-2}b-\cdots-c_1b^{n-1}$$

上式右端是整數，因此 $\frac{c_0b^n}{a}$ 是整數。但 $(a, b)=1$，故 $a \mid c_0$。

由此引理可得下列二系。

系 1　若 $c_n=\pm 1$ 時，(1)有非 0 的有理數解，則此解是整數且可整除 c_0。

系 2　對於任意整數 c 與 $n>0$，則 $x^n=c$ 的有理數解是整數。如是，$x^n=c$ 是有理數解的充要條件是 c 為一整數的 n 次乘冪。

例　$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ 與 $\sqrt[3]{5}$ 是無理數。因 $x^2=2$，$x^2=3$ 與 $x^3=5$ 沒有整數解。

應用系 1 可導出某些三角函數值是無理數。

系 3　設 $\theta=\gamma\pi$，在此 γ 是有理數，則除

了 $\cos\theta=0$，$\pm\frac{1}{2}$，± 1，$\sin\theta=0$，$\pm\frac{1}{2}$，± 1，$\tan\theta=0$，± 1 與 $\tan\theta$ 無定義時，$\cos\theta$，$\sin\theta$，$\tan\theta$ 是無理數。

證明　設 n 是任意正整數，用歸納法作具有整係數且領導係數爲 1 的 n 次多項式 $f_n(x)$，使對於任意實數 θ，

$$f_n(2\cos\theta)=2\cos n\theta$$

作 $f_1(x)=x$，$f_2(x)=x^2-2$

由恆等式　$2\cos(n+1)\theta=(2\cos\theta)(2\cos n\theta)-2\cos(n-1)\theta$，

可知　$f_{n+1}(x)=xf_n(x)-f_{n-1}(x)$

今取一正整數 n 使 $n\gamma$ 是一整數。當 $\theta=\gamma\pi$ 時，有　$f_n(2\cos\theta)=2\cos n\theta=2\cos n\gamma\pi$
$=\pm 2$

在此 $n\gamma$ 是偶數時，"＋"號成立；$n\gamma$ 是奇數時，"－"號成立。因此，$2\cos\theta$ 是 $f_n(x)=\pm 2$ 的解。

若 $2\cos\theta\neq 0$ 是有理數，則由系 1 知，$2\cos\theta$ 是整數。但 $-1\leq\cos\theta\leq 1$，所以 $2\cos\theta=\pm 1$，± 2。故 $\cos\theta$ 是無理數，除了 $\cos\theta=0$，$\pm\frac{1}{2}$，± 1。

若 $\theta=\gamma\pi$，則 $\frac{\pi}{2}-\theta=(\frac{1}{2}-\gamma)\pi$，而 $\frac{1}{2}-\gamma$ 是有理數。

由恆等式　$\sin\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

知 $\sin\theta$ 是無理數，除了 $\sin\theta=0$，$\pm\frac{1}{2}$，± 1

由恆等式　$\cos 2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$　知

若 $\tan\theta$ 是有理數，則 $\cos 2\theta$ 亦是有理數。

但由前面得知，$\cos 2\theta$ 的有理數值僅是 0，$\pm\frac{1}{2}$，± 1。

當 $\cos 2\theta=0$ 時，$\tan\theta=\pm 1$；

當 $\cos 2\theta=1$ 時，$\tan\theta=0$；

當 $\cos 2\theta=-1$ 時，$\tan\theta$ 無定義；

當 $\cos 2\theta=\pm\frac{1}{2}$ 時，$\tan\theta=\pm\sqrt{3}$，$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ 是無理數。

故 $\tan\theta$ 是無理數，除了 $\tan\theta=0$，± 1 與 $\tan\theta$ 無定義時

數學中有一些常數，如 π 與 e 是無理數。

首證 π 是無理數，先述下列引理。

引理 2　設 n 是任意正整數，$g(x)$ 是具有整係數的多項式，且 $f(x)=x^n g(x)$，則 $f^{(i)}(0)$ 是整數且 $n!\mid f^{(i)}(0)$，

$i=0$，1，2……

讀者自證

系 4　π 是無理數

證明　設 $\pi=\frac{a}{b}$，在此 a 與 b 是正整數，

作多項式

(2)　$f(x)=\frac{b^n x^n(\pi-x)^n}{n!}$，在此 n 是任意正整數

若令 $g(x)=b^2(\pi-x)^n$，則由引理 2 知，在 $x=0$ 時，$b^n x^n(\pi-x)^n$ 及其各階導數是整數且可爲 $n!$ 整除，故 $f^{(i)}(0)$ 是整數，

$i=0$，1，2………

但由(2)知

(3)　$f(\pi-x)=f(x)$

對上式微分有

(4)　$(-1)^i f^{(i)}(\pi-x)=f^{(i)}(x)$，

$i=1$，2，……

在(3)，(4)二式中，令 $x=0$，則得知 $f^{(i)}(\pi)$ 是整數，$i=0,1,2,\cdots\cdots$

再作多項式

(5) $$F(x)=f(x)-f^{(2)}(x)+f^{(4)}(x)-f^{(6)}(x)+\cdots\cdots+(-1)^n f^{(2n)}(x)$$

對上式微分兩次，得

(6) $$F^{(2)}(x)=f^{(2)}(x)-f^{(4)}(x)+f^{(6)}(x)-f^{(8)}(x)+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}f^{(2n)}(x)$$

將(5)，(6)二式相加，得

(7) $$F(x)+F^{(2)}(x)=f(x)$$

又由(5)，(6)二式知，$F(0)$ 與 $F(\pi)$ 是整數

由(7)得，$$\frac{d}{dx}[F^{(1)}(x)\sin x-F(x)\cos x]=(F^{(2)}(x)+F(x))\sin x=f(x)\sin x$$

將上式左右兩端由 0 至 π 積分，得

$$\int_0^\pi f(x)\sin x dx=[F^{(1)}(x)\sin x-F(x)\cos x]_0^\pi=F(\pi)+F(0)$$

因 $F(0)$ 與 $F(\pi)$ 是整數，故

$\int_0^\pi f(x)\sin x dx$ 是整數

當 $0\leq x\leq\pi$ 時，$f(x)$ 的極大值是 $\frac{\pi^n a^n}{2^{2n}n!}$，

故　$f(x)<\frac{\pi^n a^n}{n!}$ 與 $f(x)\sin x<\frac{\pi^n a^n}{n!}$

但當 $0<x<\pi$ 時，$f(x)\sin x<0$，故

$$0<\int_0^\pi f(x)\sin x dx<\frac{\pi^n a^n}{n!}\pi$$

因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi^n a^n}{n!}=0$，故取 n 相當大使 $0<\int_0^\pi f(x)\sin x dx<1$，與前所得結果 $\int_0^\pi f(x)\sin x dx$ 是整數相矛盾，由是，π 是無理數。

次證 e 是無理數，先述下列引理

引理 3　a 是有理數當且僅當存在一正整數 k 使 $[(k!)a]=(k!)a$，在此 $[x]$ 表小於或等於 x 的最大整數。

讀者自證

系 5　數學常數 e 定義爲 $e=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}$，則 e 是無理數。

證明　對於任意正整數 k，

$$(k!)e=(k!)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}=(k!)\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}+(k!)\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{1}{j!}$$

其中 $(k!)\sum\limits_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}$ 是整數，而

$$0<(k!)\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{1}{j!}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}+\cdots\cdots$$
$$<\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{(k+1)^3}+\cdots$$
$$=\frac{1}{k}$$
$$\leq 1$$

故　$$[(k!)e]=(k!)\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}<(k!)e$$

由引理 3 知，e 是無理數。