中學教師專欄

# 兩類有限級數和的遞迴公式

台中二中
易川

高中一年級的數學教材裡，有一些簡單的有限項級數，其中 $\sum_{k=1}^{n} i^k$ 對於 $k=1$、2、3 的情形是一般人所熟知的：

$$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4};$$

$k=1$ 時就是一個等差級數，$k=2$ 的結果是這樣導出來的：

$$\because (k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$$

$$\therefore 2^3-1^3=3\cdot 1^2+3\cdot 1+1$$

$$3^3-2^3=3\cdot 2^2+3\cdot 2+1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(n+1)^3-n^3=3\cdot n^2+3\cdot n+1$$

左右兩邊各相加可得：

$$(n+1)^3-1^3=3(1^2+2^2+\cdots+n^2)+3\cdot(1+2+\cdots+n)+n$$

$$3\sum_{i=1}^{n} i^2=(n+1)^3-1^3-3\sum_{i=1}^{n} i-n$$

$$=n^3+3n^2+3n-3\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n$$

$$=\frac{n[2n^2+6n+6-3n-3-2]}{2}$$

$$=\frac{n[2n^2+3n+1]}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

這種方法可用於 $k=3$，4，……，而得到 $\sum_{i=1}^{n} i^3$，$\sum_{i=1}^{n} i^4$，……。我們如令 $\sum_{i=1}^{n} i^k=S_k$，由二項式定理可求得 $S_k$ 的一般形式，過程如下：

$$\because (p+1)^{k+1}-p^{k+1}=\frac{(k+1)!}{k!1!}p^k+\frac{(k+1)!}{(k-1)!2!}p^{k-1}+\cdots+\frac{(k+1)!}{2!(k-1)!}p^2+\frac{(k+1)!}{1!k!}p+1$$

$$\therefore 2^{k+1}-1^{k+1}=\frac{(k+1)!}{k!1!}\cdot 1^k+\frac{(k+1)!}{(k-1)!2!}1^{k-1}+\cdots\cdots+\frac{(k+1)!}{2!(k-1)!}1^2+\frac{(k+1)!}{1!k!}1+1$$

$$3^{k+1}-2^{k+1}=\frac{(k+1)!}{k!1!}2^k+\frac{(k+1)!}{(k-1)!2!}2^{k-1}+\cdots\cdots+\frac{(k+1)!}{2!(k-1)!}2^2+\frac{(k+1)!}{1!k!}2+1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(n+1)^{k+1}-n^{k+1}=\frac{(k+1)!}{k!1!}n^k+\frac{(k+1)!}{(k-1)!2!}n^{k-1}+\cdots\cdots+\frac{(k+1)!}{2!(k-1)!}n^2+\frac{(k+1)!}{1!k!}n+1$$

左右兩邊各相加可得：

$$(n+1)^{k+1}-1^{k+1}=\frac{(k+1)!}{k!1!}S_k+\frac{(k+1)!}{(k-1)!2!}S_{k-1}+\cdots\cdots+\frac{(k+1)!}{2!(k-1)!}S_2+\frac{(k+1)!}{1!k!}S_1+n$$

$$\therefore\frac{(k+1)!}{k!1!}S_k=(n+1)^{k+1}-1-\frac{(k+1)!}{(k-1)!2!}S_{k-1}-\cdots\cdots-\frac{(k+1)!}{2!(k-1)!}S_2-\frac{(k+1)!}{1!k!}S_1-n$$

$$=n^{k+1}+\frac{(k+1)!}{k!1!}n^k+\cdots+\frac{(k+1)!}{k!1!}n-\frac{(k+1)!}{(k-1)!2!}S_{k-1}-\cdots-\frac{(k+1)!}{2!(k-1)!}S_2-\frac{(k+1)!}{1!k!}S_1-n$$

但 $\frac{(k+1)!}{k!1!}=k+1$，$\therefore S_k=\frac{n^{k+1}}{k+1}+\frac{k!}{k!1!}n^k+\cdots+\frac{k!}{k!1!}n-\frac{k!}{(k-1)!2!}S_{k-1}-\cdots-\frac{k!}{2!(k-1)!}S_2-\frac{k!}{1!k!}S_1-\frac{n}{k+1}$

例如已知：

$$S_1=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S_3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

故 $S_4=\frac{n^5}{5}+n^4+\frac{4!}{3!2!}n^3+\frac{4!}{2!3!}n^2+n-\frac{4!}{3!2!}S_3-\frac{4!}{2!3!}S_2-S_1-\frac{n}{5}$

$$=\frac{n^5}{5}+n^4+2n^3+2n^2+n-2\frac{n^2(n+1)^2}{4}-2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n}{5}$$

$$=\frac{n[6n^4+30n^3+60n^2+60n+30-15n(n+1)^2-10(n+1)(2n+1)-15(n+1)-6]}{30}$$

$$=\frac{n[6n^4+30n^3+60n^2+60n+30-15n^3-30n^2-15n-20n^2-30n-10-15n-15-6]}{30}$$

$$=\frac{n[6n^4+15n^3-1]}{30}$$

$$=\frac{n(2n^2+3n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

$$S_5=\frac{n^6}{6}+n^5+\frac{5!}{4!2!}n^4+\frac{5!}{3!3!}n^3$$

$$+\frac{5!}{2!4!}n^2+n-\frac{5!}{4!2!}S_4-$$

$$-\frac{5!}{3!3!}S_3-\frac{5!}{2!4!}S_2-\frac{5!}{1!5!}S_1$$

$$-\frac{n}{6}$$

$$=\frac{n^6}{6}+n^5+\frac{5}{2}n^4+\frac{10}{3}n^3+\frac{5}{2}n^2+n$$

$$-\frac{5}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

$$-\frac{10}{3}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{5}{2}\cdot$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}$$

$$-\frac{n}{6}$$

$$=\frac{n[2n^5+12n^4+30n^3+40n^2+30n+12-(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)-10n(n+1)^2-5(n+1)(2n+1)-6(n+1)-2]}{12}$$

$$=\frac{n[2n^5+6n^4+5n^3-n]}{12}$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$$

其他 $S_6$ 、$S_7$……可依次求出。

其次要討論的課題是級數 $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)\cdots\cdots(i+k)$，對於不很大的 k ，我們可以利用上面所提到的 $S_k$ 求出結果，如果我們令 $T_k^n=\sum_{i=1}^{n} i\cdots(i+k)$，則：

$$T_0^n=\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$T_1^n=\sum_{i=1}^{n} i(i+1)$$

$$=1\cdot2+2\cdot3+\cdots+n(n+1)$$

$$=(1^2+1)+(2^2+2)+\cdots+(n^2+n)$$

$$=(1^2+2^2+\cdots+n^2)+(1+2+\cdots+n)$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)[(2n+1)+3]}{6}$$

$$=\frac{2n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$T_2^n=\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} i^3+3i^2+2i$$

$$=\sum_{i=1}^{n} i^3+3\sum_{i=1}^{n} i^2+2\sum_{i=1}^{n} i$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{3n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$+\frac{2n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)[n^2+n+4n+2+4]}{4}$$

$$=\frac{n(n+1)(n^2+5n+6)}{4}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

由這三個事例，隱約有一個規則，我們再試試 $T_3$ 和 $T_4$。

$$T_3^n=\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)(i+3)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} i^4+6i^3+11i^2+6i$$

$$=\sum_{i=1}^{n} i^4+6\sum_{i=1}^{n} i^3+11\sum_{i=1}^{n} i^2+6\sum_{i=1}^{n} i$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

$$+6\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$+\frac{11n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{6n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)[(2n+1)(3n^2+3n-1)+45n(n+1)+55(2n+1)+90]}{30}$$

$$=\frac{n(n+1)[6n^3+54n^2+156n+144]}{30}$$

$$=\frac{n(n+1)[n^3+9n^2+26n+24]}{5}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$$

$$T_4^n=\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} i^5+10i^4+35i^3+50i^2+24i$$

$$=\sum_{i=1}^{n} i^5+10\sum_{i=1}^{n} i^4+35\sum_{i=1}^{n} i^3+50\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$+24\sum_{i=1}^{n} i$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$$

$$+\frac{10n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

$$+\frac{35n^2(n+1)^2}{4}+\frac{50n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$+\frac{24n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)[n(n+1)(2n^2+2n-1)+4(2n+1)(3n^2+3n-1)+105n(n+1)+100(2n+1)+144]}{12}$$

$$=\frac{n(n+1)[2n^4+4n^3+n^2-n+24n^3+36n^2+4n-4+105n^2+105n+200n+100+144]}{12}$$

$$=\frac{n(n+1)[2n^4+28n^3+142n^2+308n+240]}{12}$$

$$=\frac{n(n+1)(n^4+14n^3+71n^2+154n+120]}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{6}$$

這個規則性現在更加明顯了，事實上，我們是能夠直接加以證明的，因爲

$$T_{k+1}^{n}=\sum_{i=1}^{n} i(i+1)\cdots(i+k+1)$$

$$=1\cdot 2\cdots(1+k)(1+k+1)+2\cdot 3\cdots(2+k+1)+\cdots+n(n+1)\cdots(n+k+1)$$

$$=[1\cdot 2\cdots(1+k)(k+2)+2\cdot 3\cdots(k+2)\cdot(k+2)+\cdots+n(n+1)\cdots(n+k)(k+2)]+[2\cdot 3\cdots\cdots(k+2)\cdot 1+3\cdot 4\cdots(k+3)\cdot 2+\cdots+n(n+1)\cdots(n+k)(n-1)]$$

$$=(k+2)[1\cdot 2\cdots(1+k)+2\cdot 3\cdots(k+2)+\cdots+n(n+1)\cdots(n+k)]+[1\cdot 2\cdot 3\cdots(k+2)+2\cdot 3\cdot 4\cdots(k+3)+\cdots+(n-1)n(n+1)\cdots(n+k)]$$

$$=(k+2)\cdot T_k^n+T_{k+1}^{n-1}$$

故 $(k+2)\cdot T_k^n=T_{k+1}^n-T_{k+1}^{n-1}$

$$=n(n+1)\cdot\cdots(n+k+1)$$

$$T_k^n=\frac{n(n+1)\cdots\cdots(n+k+1)}{k+2}\cdots\cdots\cdots(2)$$

上面我們所列的：

$$T_0^n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$T_1^n=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$T_2^n=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

$$T_3^n=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$$

$$T_4^n=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{6}$$

均應符合這個等式，等式(2)亦就是我們所說的規則性。我們現在利用這個等式來演算兩個例題。

例 1 $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5+2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6+\cdots\cdots+100\cdot 101\cdot 102\cdot 103\cdot 104=?$

此即 $T_4^{100}=\frac{100\cdot 101\cdot 102\cdot 103\cdot 104\cdot 105}{6}$

$$=193121292000$$

例 2 $51\cdot 52\cdot 53\cdot 54+52\cdot 53\cdot 54\cdot 55+\cdots\cdots+100\cdot 101\cdot 102\cdot 103$

此即 $T_3^{100}-T_3^{48}$

$$=\frac{100\cdot 101\cdot 102\cdot 103\cdot 104}{5}-\frac{48\cdot 49\cdot 50\cdot 51}{5}$$

$$=\frac{50\cdot 51(4\cdot 101\cdot 103\cdot 104-48\cdot 49)}{5}$$

$$=10\cdot 51\cdot 4325296$$

$$=2205900960$$

接著我們再用 $T_k^n=\frac{n(n+1)\cdots(n+k+1)}{k+2}$ 來處理(1)式裡的 $S_k$：

$$T_k^n=\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)\cdots(i+k)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\Big(i^{k+1}+\big(\sum_{j=1}^{k} j\big)i^{k}+\big(\sum_{1<j_1<j_2\le k} j_1 j_2\big)i^{k-1}+\big(\sum_{1\le j_1'\le j_2'\le j_3'\le k} j_1' j_2' j_3'\big)i^{k-2}+\cdots+\big(\sum_{i=1}^{k} r\big)i\Big)$$

$$=S_{k+1}+(\sum_{j=1}^{k} j)S_k+(\sum_{1\le j_1<j_2\le k} j_1j_2)$$

$$S_{k-1}+(\sum_{1\le j_1'<j_2'<j_3'\le k} j_1'j_2'j_3')S_{k-2}$$

$$+\cdots+K!\cdot S_1$$

$$\text{故 } S_{k+1}=T_k^n-(\sum_{j=1}^{k} j)S_k-(\sum_{1\le j_1<j_2\le k} j_1j_2)$$

$$S_{k-1}-(\sum_{1\le j_1'<j_2'<j_3'\le k} j_1'j_2'j_3')S_{k-2}$$

$$-\cdots-K!S_1 \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

這又是一個遞迴形式的定義方式，我們用實例來與(1)式比較，看看那一個便於計算！

$$S_4=T_3^n-(\sum_{j=1}^{3} j)S_3-(\sum_{1\le j_1<j_2\le 3} j_1j_2)S_2$$

$$-3!S_1$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$$

$$-6\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}-11\cdot\frac{n(n+1)}{6}$$

$$(2n+1)-6\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)[6(n+2)(n+3)(n+4)-45n(n+1)-55(2n+1)-90]}{30}$$

$$=\frac{n(n+1)[6n^3+54n^2+156n+144-45n^2-45n-110n-55-90]}{30}$$

$$=\frac{n(n+1)[6n^3+9n^2+n-1]}{30}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

$$S_5=T_4^n-(\sum_{j=1}^{5} j)S_4-(\sum_{1\le j_1<j_2\le 4} j_1j_2)S_3$$

$$-(\sum_{1\le j_1'<j_2'<j_3'\le 4} j_1'j_2'j_3')S_2-4!S_1$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{6}$$

$$-10\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

$$-35\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$-50\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$-24\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)[2(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)-4(2n+1)(3n^2+3n-1)-105n(n+1)-100(2n+1)-144]}{12}$$

$$=\frac{n(n+1)[2n^4+28n^3+142n^2+308n+240-24n^3-36n^2-4n+4-105n^2-105n-200n-100-144]}{12}$$

$$=\frac{n(n+1)[2n^4+4n^3+n^2-n]}{12}$$

$$=\frac{n^2(n+1)(2n^3+4n^2+n-1)}{12}$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$$

比較上，(1)和(3)的算法複雜性相差無幾，不過(1)式的算法我們只能在分子裡先析出n，其他的因式則需先行展開合併後再分解，(3)式的算法則能

析出 $n(n+1)$，這是它唯有的好處，同時我們也由此可以斷言，$S_k$ 的遞廻公式中，其分子有 $n(n+1)$ 的因式。

(1)式和(2)式若代入排列組合的符號，可以做某程度的簡化，如(1)式可改為：

$$S_k=\frac{1}{k+1}\left(n^{k+1}+{}_{k+1}C_1n^k+{}_{k+1}C_2n^{k-1}+\cdots+{}_{k+1}C_kn-{}_{k+1}C_{k-1}S_{k-1}-{}_{k+1}C_{k-2}S_{k-2}-\cdots-{}_{k+1}C_1S_1-n\right)$$

(2)式可改寫為：

$$T_k^n=\frac{{}_{n+k+1}P_{k+2}}{k+2}$$

如果 $T_k^n$ 的各項也用組合符號代替，則可得到等式

$${}_{k+1}P_{k+1}+{}_{k+2}P_{k+1}+{}_{k+3}P_{k+1}+\cdots\cdots+{}_{n+k+1}P_{k+1}=\frac{{}_{n+k+1}P_{k+2}}{k+2}$$

以m代 $k+1$ 可再簡化為：

$${}_mP_m+{}_{m+1}P_m+{}_{m+2}P_m+\cdots\cdots+{}_{n+m}P_m=\frac{{}_{m+n}P_{m+1}}{m+1}$$

以上的內容，係筆者上課時舉證時留下來的問題的一個解決，也許讀者之中已經有人早已做過，只是沒有發表出來。(1)式和(2)式都是遞廻式，它們在論證時可能還有用處，但用於實際的演算時，其價值就不高了，例如我們如果要求 $S_{10}$，就得先求出 $S_9$、$S_8$、$S_7$、……，其過程的冗長繁複，可想而知；$S_k$ 有沒有直接可代入的公式？如果有又是什麼樣子？這是本文留下來的問題，筆者在此希望能拋磚引玉，得到這問題的答案！

## 科學教育信箱 疑難問題解答

本刊編輯室接到一位學生讀者提出一個問題如下：

高中化學上册第三章：$PV=nRT$，$PV=\frac{1}{3}Nmv^2$，其中 n 表示莫耳數，$R=0.082$，N表示分子個數，$\frac{n}{N}=\frac{1}{6.02\times10^{23}}$。

$PV=nRT=\frac{1}{3}Nmv^2$，皆由理想氣體導出，故相等。於是，$3nRT=Nmv^2$，由此可導出，$mv=3\times0.082\times\frac{1}{6.02\times10^{23}}\times\frac{T}{v}$，故得

$mv$（動量）$=4.2\times10^{-25}\times\frac{T}{v}$，是否合理？

本刊編輯室特商請師大化學系黃長司教授提出解答，除另函回覆該讀者之外，並將其解答刊出，供讀者參考。

前面所導出的公式 $mv=4.2\times10^{-25}\times\frac{T}{v}$，過程沒錯，結果當然合理。

讓我們就這個公式的實用性來加以討論。這個公式的意義是說：氣體分子的平均動量可由其絕對溫度T與平均速度v的比值乘以一常數求得，此常數為 $3R/N_0$。在上面的公式中，R用 0.082 升・大氣壓／莫耳・K° 代入，得 $4.2\times10^{-25}$。但是 v 與 mv 的單位通常分別以厘米／秒及克・厘米／秒來表示。所以此常數應以 $R=8.314\times10^7$ 耳格／莫耳・K° 代入求得。下一個問題是如何得知平均速度 v？v 可由T算出，但是必須知道質量m，其公式為 $v=\sqrt{\frac{3R}{N_0m}\times T}$，如果知道了m及v，那麼把m及v直接相乘，就可得到平均動量，不必利用上面所導出的式子。

通常導出一個新公式，除了要注意導出過程的是否正確，也要考慮其是否實用。