

「型」

於數學課「發見的學習」

彰化縣立員林國中

王耀鋐

「型」——宇宙的規則

我們觀察宇宙，上自天體的運行，年復年，月復月，日復日，是合乎一種對轉規則而不斷連續易回之，這就是一種「型」。

我們又觀察地上生物的運命，生生息息，內表細胞的分裂，外表生態的均衡，是合乎一種生長規則而不斷連續易變之，這也是一種「型」。

非生物質、結晶體、基本粒子的配位成形，其有無對稱性，是合乎一種構造規則而不斷連續易結之，這也是一種「型」。

「型」的意義

型 (PATTERN) 是圖案上的模樣，是音樂上的曲式，是萬物上的結構；它有來自天然至人工的設計。所以說：

型是一種直觀的道理。

型是一種構造的規則。

型是一種計畫的歸類。

然，就本文所要討論的，我們在教學上希望的「發見的學習」，也許可大膽地假設說：發見的學習是在探求問題的「型」！

以上說得太玄了，下列就數學的範疇裡取實例來概說其「型」；以諒察個人想要表達的「型」的意義。

數學的「型」

例一

【問題的伊始】

從連續整數的平方數列 $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \dots$ 中，順取連續的兩數來求其差之絕對值，則可按序列式如下：

$$2^2 - 1^2 = 3$$

$$3^2 - 2^2 = 5$$

$$4^2 - 3^2 = 7$$

$$5^2 - 4^2 = 9$$

.....

.....

【型的發生】

由上列有秩序各式觀察知道，其「型」的發生有：

(1) 各式右邊為依題意，按序排列的兩連續整數平方的差；而可得到右邊數字成為連續的奇數列。

(2) 每一式的右邊數值，是等於該式左邊兩平方數的底數的和。

如：於是：

$$3 = 2 + 1 \longrightarrow 2^2 - 1^2 = 2 + 1 = 3$$

$$5 = 3 + 2 \longrightarrow 3^2 - 2^2 = 3 + 2 = 5$$

$$7 = 4 + 3 \longrightarrow 4^2 - 3^2 = 4 + 3 = 7$$

$$9 = 5 + 4 \longrightarrow 5^2 - 4^2 = 5 + 4 = 9$$

【型的類推】

經此型的觀察歸納，我們就可了解下列的應用類題：

$$368^2 - 367^2 = ?$$

得知

$$368^2 - 367^2 = 368 + 367 = 735$$

【一般化】

如設 n 為一正整數，依原問題可推廣得一般式：

$$n^2 - (n-1)^2 = n + (n-1)$$

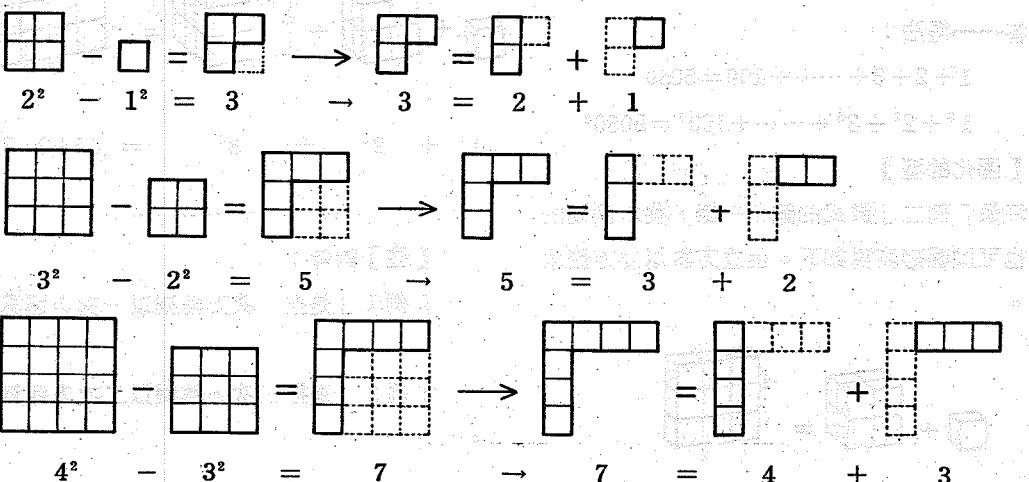
$$2n-1=2n-1$$

$$2n-1=\text{奇數}$$

【附學習】

(1) 從「型的發生(2)」附帶知道：連續的兩整數的和，必為奇數。

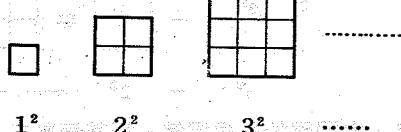
(2) 又，連續的兩整數是一奇數一偶數 (\because 自然數列爲奇偶相間關係)，得知「奇數+偶數=奇數」。



例二

【問題】

我們知道，平方數可以用正方形的圖形來表現，如下：



那麼，如下列的數式也能夠用圖形表現出來嗎？

$$2^2 - 1^2 = 3$$

$$3^2 - 2^2 = 5$$

$$4^2 - 3^2 = 7$$

$$5^2 - 3^2 = 9$$

這個問題可以說是「例一」的再發展，再認識；並以「數式的圖化」來求其另一種「型」的表現。

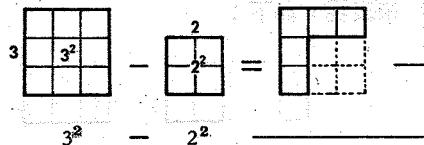
【型的發生】

現在把問題，即將數式圖化如下，使數式用圖形來求了解，也使學習者對於數式的興趣及信度倍增。

圖例：圖形的虛線表示與前圖形的關係位置，以示明其加減運算的結果。

從上面的圖形運算，在箭頭的左右邊作一觀察歸納也可知，數式的成立為：

$$2^2 - 1^2 = 2 + 1 = 3$$



又，本問題的數式運算，把某兩數二次方的差，轉變為某兩數一次方的和，也是問題的特殊化趣味的所在。

例三

【問題】

將連續整數的立方求和，形成如下：

$$1^3 + 2^3 = 3^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 15^2$$

【型的發生】

觀察其「型」的結構為：「從1開始的連續整數的立方和，等於該連續整數和的平方」，列關係式說明如下：

$$1^3 + 2^3 = 3^2 \longrightarrow 1+2=3$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2 \longrightarrow 1+2+3=6$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2 \longrightarrow 1+2+3+4=10$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 15^2 \longrightarrow 1+2+3+4+5=15$$

【型的類推】

問——如果有： $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 100^3 = ?$

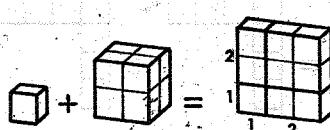
答——得法：

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = 5050$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 100^3 = 5050^2$$

【圖化的型】

好像「例二」數式的圖化一樣，從本例題的數式也可以圖形表現如下。但立方數以立方體表現之。



$$1^3 + 2^3 = (1+2)^3$$

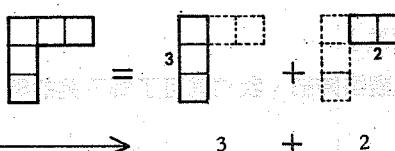
$$3^2 - 2^2 = 3 + 2 = 5$$

$$4^2 - 3^2 = 4 + 3 = 7$$

.....

【特殊化】由圖化的運算發見：「面積的運

算，轉換以邊長的運算」的方法。圖例如下：



$$3^2 - 2^2 = 3 + 2 = 5$$

$$4^2 - 3^2 = 4 + 3 = 7$$

$$5^2 - 4^2 = 5 + 4 = 9$$

$$6^2 - 5^2 = 6 + 5 = 11$$

$$7^2 - 6^2 = 7 + 6 = 13$$

$$8^2 - 7^2 = 8 + 7 = 15$$

$$9^2 - 8^2 = 9 + 8 = 17$$

$$10^2 - 9^2 = 10 + 9 = 19$$

$$11^2 - 10^2 = 11 + 10 = 21$$

$$12^2 - 11^2 = 12 + 11 = 23$$

$$13^2 - 12^2 = 13 + 12 = 25$$

$$14^2 - 13^2 = 14 + 13 = 27$$

$$15^2 - 14^2 = 15 + 14 = 29$$

$$16^2 - 15^2 = 16 + 15 = 31$$

$$17^2 - 16^2 = 17 + 16 = 33$$

$$18^2 - 17^2 = 18 + 17 = 35$$

$$19^2 - 18^2 = 19 + 18 = 37$$

$$20^2 - 19^2 = 20 + 19 = 39$$

$$21^2 - 20^2 = 21 + 20 = 41$$

$$22^2 - 21^2 = 22 + 21 = 43$$

$$23^2 - 22^2 = 23 + 22 = 45$$

$$24^2 - 23^2 = 24 + 23 = 47$$

$$25^2 - 24^2 = 25 + 24 = 49$$

$$26^2 - 25^2 = 26 + 25 = 51$$

$$27^2 - 26^2 = 27 + 26 = 53$$

$$28^2 - 27^2 = 28 + 27 = 55$$

$$29^2 - 28^2 = 29 + 28 = 57$$

$$30^2 - 29^2 = 30 + 29 = 59$$

$$31^2 - 30^2 = 31 + 30 = 61$$

$$32^2 - 31^2 = 32 + 31 = 63$$

$$33^2 - 32^2 = 33 + 32 = 65$$

$$34^2 - 33^2 = 34 + 33 = 67$$

$$35^2 - 34^2 = 35 + 34 = 69$$

$$36^2 - 35^2 = 36 + 35 = 71$$

$$37^2 - 36^2 = 37 + 36 = 73$$

$$38^2 - 37^2 = 38 + 37 = 75$$

$$39^2 - 38^2 = 39 + 38 = 77$$

$$40^2 - 39^2 = 40 + 39 = 79$$

$$41^2 - 40^2 = 41 + 40 = 81$$

$$42^2 - 41^2 = 42 + 41 = 83$$

$$43^2 - 42^2 = 43 + 42 = 85$$

$$44^2 - 43^2 = 44 + 43 = 87$$

$$45^2 - 44^2 = 45 + 44 = 89$$

$$46^2 - 45^2 = 46 + 45 = 91$$

$$47^2 - 46^2 = 47 + 46 = 93$$

$$48^2 - 47^2 = 48 + 47 = 95$$

$$49^2 - 48^2 = 49 + 48 = 97$$

$$50^2 - 49^2 = 50 + 49 = 99$$

$$51^2 - 50^2 = 51 + 50 = 101$$

$$52^2 - 51^2 = 52 + 51 = 103$$

$$53^2 - 52^2 = 53 + 52 = 105$$

$$54^2 - 53^2 = 54 + 53 = 107$$

$$55^2 - 54^2 = 55 + 54 = 109$$

$$56^2 - 55^2 = 56 + 55 = 111$$

$$57^2 - 56^2 = 57 + 56 = 113$$

$$58^2 - 57^2 = 58 + 57 = 115$$

$$59^2 - 58^2 = 59 + 58 = 117$$

$$60^2 - 59^2 = 60 + 59 = 119$$

$$61^2 - 60^2 = 61 + 60 = 121$$

$$62^2 - 61^2 = 62 + 61 = 123$$

$$63^2 - 62^2 = 63 + 62 = 125$$

$$64^2 - 63^2 = 64 + 63 = 127$$

$$65^2 - 64^2 = 65 + 64 = 129$$

$$66^2 - 65^2 = 66 + 65 = 131$$

$$67^2 - 66^2 = 67 + 66 = 133$$

$$68^2 - 67^2 = 68 + 67 = 135$$

$$69^2 - 68^2 = 69 + 68 = 137$$

$$70^2 - 69^2 = 70 + 69 = 139$$

$$71^2 - 70^2 = 71 + 70 = 141$$

$$72^2 - 71^2 = 72 + 71 = 143$$

$$73^2 - 72^2 = 73 + 72 = 145$$

$$74^2 - 73^2 = 74 + 73 = 147$$

$$75^2 - 74^2 = 75 + 74 = 149$$

$$76^2 - 75^2 = 76 + 75 = 151$$

$$77^2 - 76^2 = 77 + 76 = 153$$

$$78^2 - 77^2 = 78 + 77 = 155$$

$$79^2 - 78^2 = 79 + 78 = 157$$

$$80^2 - 79^2 = 80 + 79 = 159$$

$$81^2 - 80^2 = 81 + 80 = 161$$

$$82^2 - 81^2 = 82 + 81 = 163$$

$$83^2 - 82^2 = 83 + 82 = 165$$

$$84^2 - 83^2 = 84 + 83 = 167$$

$$85^2 - 84^2 = 85 + 84 = 169$$

$$86^2 - 85^2 = 86 + 85 = 171$$

$$87^2 - 86^2 = 87 + 86 = 173$$

$$88^2 - 87^2 = 88 + 87 = 175$$

$$89^2 - 88^2 = 89 + 88 = 177$$

$$90^2 - 89^2 = 90 + 89 = 179$$

$$91^2 - 90^2 = 91 + 90 = 181$$

$$92^2 - 91^2 = 92 + 91 = 183$$

$$93^2 - 92^2 = 93 + 92 = 185$$

$$94^2 - 93^2 = 94 + 93 = 187$$

$$95^2 - 94^2 = 95 + 94 = 189$$

$$96^2 - 95^2 = 96 + 95 = 191$$

$$97^2 - 96^2 = 97 + 96 = 193$$

$$98^2 - 97^2 = 98 + 97 = 195$$

$$99^2 - 98^2 = 99 + 98 = 197$$

$$100^2 - 99^2 = 100 + 99 = 199$$

$$101^2 - 100^2 = 101 + 100 = 201$$

$$102^2 - 101^2 = 102 + 101 = 203$$

$$103^2 - 102^2 = 103 + 102 = 205$$

$$104^2 - 103^2 = 104 + 103 = 207$$

$$105^2 - 104^2 = 105 + 104 = 209$$

$$106^2 - 105^2 = 106 + 105 = 211$$

$$107^2 - 106^2 = 107 + 106 = 213$$

$$108^2 - 107^2 = 108 + 107 = 215$$

$$109^2 - 108^2 = 109 + 108 = 217$$

$$110^2 - 109^2 = 110 + 109 = 219$$

$$111^2 - 110^2 = 111 + 110 = 221$$

$$112^2 - 111^2 = 112 + 111 = 223$$

$$113^2 - 112^2 = 113 + 112 = 225$$

$$114^2 - 113^2 = 114 + 113 = 227$$

$$115^2 - 114^2 = 115 + 114 = 229$$

$$116^2 - 115^2 = 116 + 115 = 231$$

$$117^2 - 116^2 = 117 + 116 = 233$$

$$118^2 - 117^2 = 118 + 117 = 235$$

$$119^2 - 118^2 = 119 + 118 = 237$$

$$120^2 - 119^2 = 120 + 119 = 239$$

$$121^2 - 120^2 = 121 + 120 = 241$$

$$122^2 - 121^2 = 122 + 121 = 243$$

$$123^2 - 122^2 = 123 + 122 = 245$$

$$124^2 - 123^2 = 124 + 123 = 247$$

$$125^2 - 124^2 = 125 + 124 = 249$$

$$126^2 - 125^2 = 126 + 125 = 251$$

$$127^2 - 126^2 = 127 + 126 = 253$$

$$128^2 - 127^2 = 128 + 127 = 255$$

$$129^2 - 128^2 = 129 + 128 = 257$$

$$130^2 - 129^2 = 130 + 129 = 259$$

$$131^2 - 130^2 = 131 + 130 = 261$$

$$132^2 - 131^2 = 132 + 131 = 263$$

$$133^2 - 132^2 = 133 + 132 = 265$$

$$134^2 - 133^2 = 134 + 133 = 267$$

$$135^2 - 134^2 = 135 + 134 = 269$$

$$136^2 - 135^2 = 136 + 135 = 271$$

$$137^2 - 136^2 = 137 + 136 = 273$$

$$138^2 - 137^2 = 138 + 137 = 275$$

$$139^2 - 138^2 = 139 + 138 = 277$$

$$140^2 - 139^2 = 140 + 139 = 279$$

$$141^2 - 140^2 = 141 + 140 = 281$$

$$142^2 - 141^2 = 142 + 141 = 283$$

$$143^2 - 142^2 = 143 + 142 = 285$$

$$144^2 - 143^2 = 144 + 143 = 287$$

$$145^2 - 144^2 = 145 + 144 = 289$$

$$146^2 - 145^2 = 146 + 145 = 291$$

$$147^2 - 146^2 = 147 + 146 = 293$$

$$148^2 - 147^2 = 148 + 147 = 295$$

$$149^2 - 148^2 = 149 + 148 = 297$$

$$150^2 - 149^2 = 150 + 149 = 299$$

$$151^2 - 150^2 = 151 + 150 = 301$$

$$152^2 - 151^2 = 152 + 151 = 303$$

$$153^2 - 152^2 = 153 + 152 = 305$$

$$154^2 - 153^2 = 154 + 153 = 307$$

$$155^2 - 154^2 = 155 + 154 = 309$$

$$156^2 - 155^2 = 156 + 155 = 311$$

$$157^2 - 156^2 = 157 + 156 = 313$$

$$158^2 - 157^2 = 158 + 157 = 315$$

例四

【問題】

我們約定：

$$\begin{array}{r} 0 \quad 0 \quad 1 \quad 10 \quad 11 \\ + 0 \quad + 1 \quad + 1 \quad + 1 \quad + 1 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 10 \quad 11 \quad 100 \\ \dots \end{array}$$

【型的產生】

從此約定，我們可得到其「型」為：

- (1)加法結果——0，1不進位；而以1+1爲進位。
 (2)只有0，1兩符號，無2，3，4，……的符號。

依此，我們將可計算：

$$1101 + 111 = ?$$

得算法爲：

$$\begin{array}{r} 1101 \\ + 111 \\ \hline 10100 \end{array}$$

(3)這個「型」，如要表示「奇偶」數，就方便多了。看到個位數是1，就是奇數；個位數0，就是偶數。

(4)這個「型」，與我們的易經「陰陽」說有類同；陽爻「—」，陰爻「—」。

(5)這個「型」又與我們在討論問題的「是非」表示語類同。

這樣一來，這個「型」就可供我們擴大應用於其他方面的了！

例五

【問題】

有一新記號 $\llbracket a \rrbracket$ 表示：

$$\llbracket 1 \rrbracket = 1 \quad \llbracket 1.1 \rrbracket = 1$$

$$\begin{array}{ll} \llbracket 1.2 \rrbracket = 1 & \llbracket 1.3 \rrbracket = 1 \\ \llbracket 1.4 \rrbracket = 1 & \llbracket 1.5 \rrbracket = 2 \\ \llbracket 1.6 \rrbracket = 2 & \llbracket 1.7 \rrbracket = 2 \\ \llbracket 1.8 \rrbracket = 2 & \llbracket 1.9 \rrbracket = 2 \\ \llbracket 2 \rrbracket = 2 & \llbracket 2.1 \rrbracket = 2 \\ \dots & \end{array}$$

又應用於計算：

$$\llbracket 8.7 - 6.25 \rrbracket = 2$$

$$\llbracket 0.35 + 3.16 \rrbracket = 4$$

$$\llbracket 5 \times \frac{1}{3} \rrbracket = 2$$

$$\llbracket 2.9 \rrbracket + \llbracket 3.5 \rrbracket = 7$$

$$\llbracket \sqrt{2} \times 2 \rrbracket = \llbracket \sqrt{2} + 2 \rrbracket$$

$$\llbracket 2.9 + 5.5 \rrbracket = 6$$

【型的產生】

觀察上面對於新記錄的約定應爲：

$\llbracket a \rrbracket$ ……是整數；是a數的小數點以下爲四捨五入的一整數。

這個「型」的產生，是爲了某種的方便而來。然而有時，因約定了新的記號，另再發生了新的問題；那就是創造性作用了。

我們可以解答下列問題：

問題

$$(1) \llbracket 7.49 \rrbracket = ?$$

$$(2) \llbracket 0.4 \rrbracket = ?$$

$$(3) \llbracket 3.6 \times 0.7 \rrbracket = ?$$

$$(4) \llbracket \frac{1}{3} \rrbracket + \llbracket \frac{1}{2} \rrbracket = ?$$

(5)如果 $x + \llbracket x \rrbracket - y + \llbracket y \rrbracket + \llbracket x+y \rrbracket - \llbracket x \div y \rrbracket = 0$ 時，x，y應爲小數。求x，y的可能數值。

答案

- | | |
|-------|-------|
| (1) 7 | (2) 0 |
| (3) 3 | (4) 1 |

(5) $1.5 > x > 1.4$, $0.5 > y > 0.4$, 且 x , y 的小數點以下的數字必相同。譬如：

$$x = 1.49, \quad y = 0.49;$$

$$\text{或 } x = 1.401, \quad y = 0.401;$$

例六

【問題】

畫邊長為 $1, 2, 3, 4, \dots$ 的各正三角形，又各正三角形均可分割為邊長為 1 的正三角形。圖示如下：

$\triangle \cdots \cdots 1$

$\triangle \cdots \cdots 4$

$\triangle \cdots \cdots 9$

$\triangle \cdots \cdots 16$

【型的發生】

觀察其「型」知，各分割個數為原形邊長的平方數：

邊長 分割個數

$$1 \longrightarrow 1^2 = 1$$

$$2 \longrightarrow 2^2 = 4$$

$$3 \longrightarrow 3^2 = 9$$

$$4 \longrightarrow 4^2 = 16$$

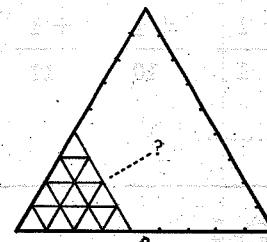
.....

$$n \longrightarrow n^2$$

【型的類推】

類題

把一邊長 9 的正三角形，分割成邊長 1 的單位正三角形，可得幾個？

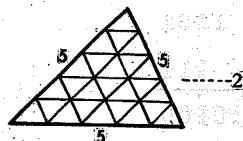


答 $9^2 = 81$

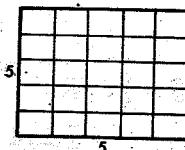
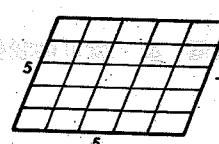
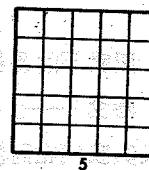
【型的擴展】

原問題為「正三角形」的相似形分割與邊長的關係，我們可以再推展到各多角形的可能性。

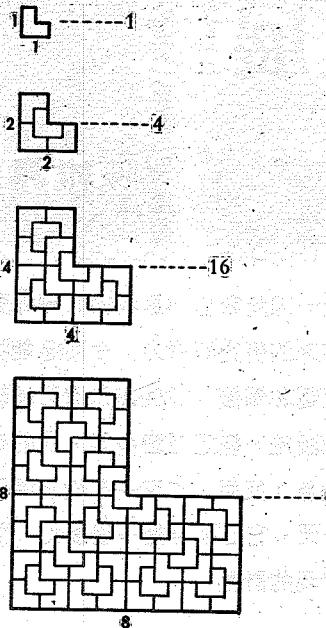
(1)一般三角形——我們是由特殊的正三角形探討問題的，但一般的三角形也能成立，如下圖：



(2)正方形、長方形、平行四邊形，也可能：



- (3)一般的四邊形，不可能。
 (4)正五角形、正六角形、……均不可能。
 (5)更特殊形的探討——如下圖「凹六邊形」的例子：



(6)可以再做立體圖形的分割探討等。

例七

【問題】

我們約定圖形：

$$\begin{aligned}
 M &= \sim = \textcircled{2} = \swarrow = - \\
 \square &= \triangle = \heartsuit = \blacksquare = \bigcirc \\
 \textcirclearrowleft &= \rightarrow = \heartsuit = \perp = \top \\
 - \neq \bigcirc \neq \top \neq \pi \neq 8
 \end{aligned}$$

【型的產生】

這是把圖形的性質，就更為接近於本質的來探討的問題。它告訴我們：

(1)將不考慮圖形的長度、面積、或角度等的大小計量的關係。

(2)也不考慮圖形的彎曲、折向等「連續變形」的關係。

(3)而注重其圖形有否相交，或斷接等的位相關係。

(4)尊重視覺的直觀，以簡潔的論理來探討自由奔放的圖形。

【問題推展】

依據這樣的約定，試把(一)阿拉伯數字，及(二)英文字母的字形歸類。

(一)得分爲下列 5 形：

- ① 1 = 2 = 3 = 5 = 7
- ② 4
- ③ 6 = 9
- ④ 8
- ⑤ 0

(二)得分爲下列 9 形：

- ① A = R
- ② B
- ③ C = L = M = N = S
= U = V = W = Z
- ④ D = O
- ⑤ E = F = J = T = Y
- ⑥ G = H = I = K
- ⑦ P
- ⑧ Q
- ⑨ X

結論

(一)從問題中「型」的發現，可知道：問題的結構道理、結構類型，或其結構約定；進而使問題迎刃而解。

(二)由「型」推論，是一種新解法的嘗試，它

(下接第 68 頁)

則原始分數為 x 的理想分數

$$f(x) = \begin{cases} 60 + (x-a) \frac{40}{100-a}, & x \geq a \\ 60 - (a-x) \frac{60}{a} = \frac{60x}{a}, & x < a \end{cases}$$

(3) 可視實際需要，作類似轉換：

例(1)，若最高原始分數未達 70 分，希以 30 分為及格，而優秀學生可得高分時，可由

$$\begin{array}{ccccccc} \text{原始分數} & 0 & \xrightarrow{30} & 30 & \xleftarrow{40} & 70 \\ \Downarrow & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & \text{轉換之。} \\ \text{理想分數} & 0 & \xleftarrow{60} & 60 & \xleftarrow{40} & 100 \end{array}$$

例(2)，當試題總分超過 100 分時，可仿

$$\begin{array}{ccccccc} \text{原始分數} & 0 & \xleftarrow{80} & 80 & \xleftarrow{70} & 150 \\ \Downarrow & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & \text{轉換之。} \\ \text{理想分數} & 0 & \xleftarrow{60} & 60 & \xleftarrow{40} & 100 \end{array}$$

(4) 為便利教師使用，可整理常用「原始分數」換作「理想分數」對照表，因限於篇幅，不擬刊載，需用者，請逕向作者函索。

四、理想分數的價值

作者經兩年試驗後，發現理想分數有下列優點：

- (1) 使「百分法」產生了稍似「等第法」的效果。
- (2) 換算十分簡便，易於全面採行。
- (3) 零分轉換仍得零分，無不勞而獲現象，可避免學生放棄某科目之學習。
- (4) 換算時可任取適當的及格標準。
- (5) 教師命題時可配合升學需要，作各種不同難度之測驗；不同程度學生亦可測驗同一難度試題。
- (6) $a > b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$ ，即百分等級較高的學生，其理想分數仍高，可促使學生力爭上游。
- (7) 每一科目能經合理轉換而得到接近常態分

配之成績。

五、實施理想分數的建議

(1) 擬訂辦法（可向作者函索範例），並使師生詳知瞭解，以利推行。

(2) 印製常用轉換對照表。

(3) 每次考試後，需轉換分數之科目，由教學研究會主席會同任課教師決定適當的及格標準，同一程度班級儘可能取用同一標準。

(4) 統計分析考試成績時，為避免誤差，應取原始成績處理為宜。

(5) 成績通知單最好同時填載原始及理想分數，使家長從原始分數瞭解學生程度，由理想分數知其進步與否？會留級嗎？可能申請獎學金嗎？

(6) 如果您怕麻煩，就僅轉換學期成績亦可。

〔上接第 81 頁〕

有時只是蓋然推論的認識，這時，如果要求更正確性，應再進一步做嚴格的證明推論。

(二)「型」的探討或設定，有助於問題的發見，產生新問題，並刺激「創造力的開發」。就學習說，也許就是最為「本質的」啟發學習法；其效果就：不單是「知識的」學習，不再是「填鴨式的」學習，也不再是「機械式解題技倆的」學習。

四以上我們列舉的幾種「型」的例子，是較偏重於興趣化、遊戲化、巧妙化的問題，可供學生學習餘的消遣用。還有各問題的內容，均可再探討發展，更求完善。

(五)此外，我們也許可在一般課程教材當中發見並構想設計編作其「型」，或其相關的「型」，以配合教學使用，將可使教學生動吧！