中學教師專欄

「型」於數學課「發見的學習」

彰化縣立員林國中
王耀錕

「型」——宇宙的規則

我們觀察宇宙，上自天體的運行，年復年，月復月，日復日，是合乎一種對轉規則而不斷連續易回之，這就是一種「型」。

我們又觀察地上生物的運命，生生息息，內表細胞的分裂，外表生態的均衡，是合乎一種生長規則而不斷連續易變之，這也是一種「型」。

非生物質、結晶體、基本粒子的配位成形，其有無對稱性，是合乎一種構造規則而不斷連續易結之，這也是一種「型」。

「型」的意義

型（PATTERN）是圖案上的模樣，是音樂上的曲式，是萬物上的結構；它有來自天然至人工的設計。所以說：

型是一種直觀的道理。

型是一種構造的規則。

型是一種計畫的歸類。

然，就本文所要討論的，我們在教學上希望的「發見的學習」，也許可大膽地假設說：發見的學習是在探求問題的「型」！

以上說得太玄了，下列就數學的範疇裡取實例來概說其「型」；以諒察個人想要表達的「型」的意義。

數學的「型」

例一

【問題的伊始】

從連續整數的平方數列 1^2，2^2，3^2，4^2，5^2 ，………中，順取連續的兩數來求其差之絕對值，則可按序列式如下：

$2^2-1^2=3$

$3^2-2^2=5$

$4^2-3^2=7$

$5^2-4^2=9$

………

………

【型的發生】

由上列有秩序的各式觀察知道，其「型」的發生有：

(1)各式右邊為依題意，按序排列的兩連續整數平方的差；而可得到右邊數字成為連續的奇數列。

(2)每一式的右邊數值，是等於該式左邊兩平方數的底數的和。

如：　　　　於是：

$3=2+1 \longrightarrow 2^2-1^2=2+1=3$

$5=3+2 \longrightarrow 3^2-2^2=3+2=5$

$7=4+3 \longrightarrow 4^2-3^2=4+3=7$

$9=5+4 \longrightarrow 5^2-4^2=5+4=9$

…………………………

…………………………

【型的類推】

經此型的觀察歸納，我們就可了解下列的應用類題：

$368^2-367^2=?$

得知

$368^2-367^2=368+367=735$

【一般化】

如設n爲一正整數，依原問題可推廣得一般式：

$$\boxed{n^2-(n-1)^2=n+(n-1)}$$

$2n-1=2n-1$

$2n-1=$奇數

【附學習】

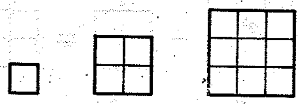
(1)從「型的發生(2)」附帶知道：連續的兩整數的和，必爲奇數。

(2)又，連續的兩整數是一奇數一偶數（∵自然數列爲奇偶相間關係），得知「奇數＋偶數＝奇數」。

例二

【問題】

我們知道，平方數可以用正方形的圖形來表現，如下：



1^2　2^2　3^2　……

那麼，如下列的數式也能夠用圖形表現出來嗎？

$2^2-1^2=3$

$3^2-2^2=5$

$4^2-3^2=7$

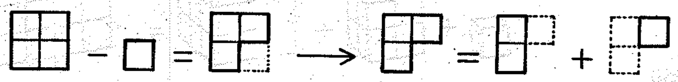
$5^2-3^2=9$

………………

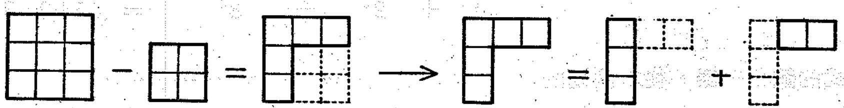
這個問題可以說是「例一」的再發展，再認識；並以「數式的圖化」來求其另一種「型」的表現。

【型的發生」

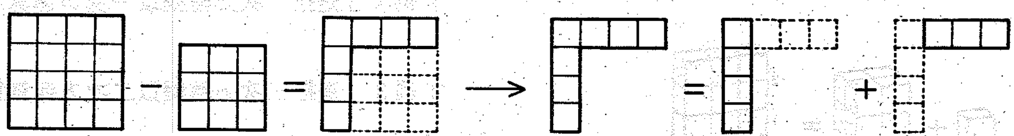
現在把問題，即將數式圖化如下，使數式用圖形來求了解，也使學習者對於數式的興趣及信度倍增。



$2^2 - 1^2 = 3 \rightarrow 3 = 2 + 1$



$3^2 - 2^2 = 5 \rightarrow 5 = 3 + 2$



$4^2 - 3^2 = 7 \rightarrow 7 = 4 + 3$

…………………………………………………………

圖例：圖形的虛線表示與前圖形的關係位置，以示明其加減運算的結果。

從上面的圖形運算，在箭頭的左右邊作一觀察歸納也可知，數式的成立為：

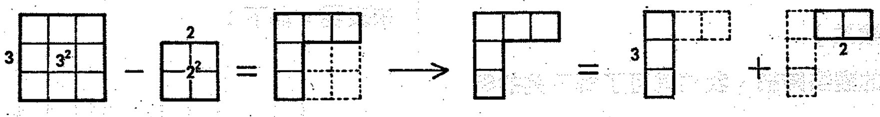
$$2^2-1^2=2+1=3$$

$$3^2-2^2=3+2=5$$

$$4^2-3^2=4+3=7$$

……………

【特殊化】由圖化的運算發見：「面積的運算，轉換以邊長的運算」的方法。圖例如下：



$$3^2 \quad - \quad 2^2 \longrightarrow 3 \quad + \quad 2$$

又，本問題的數式運算，把某兩數二次方的差，轉變為某兩數一次方的和，也是問題的特殊化趣味的所在。

例三

【問題】

將連續整數的立方求和，形成如下：

$$1^3+2^3=3^2$$

$$1^3+2^3+3^3=6^2$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3=10^2$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=15^2$$

……………………

【型的發生】

觀察其「型」的結構為：「從1開始的連續整數的立方和，等於該連續整數和的平方」，列關係式說明如下：

$$1^3+2^3=3^2 \longrightarrow 1+2=3$$

$$1^3+2^3+3^3=6^2 \longrightarrow 1+2+3=6$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3=10^2 \longrightarrow 1+2+3+4=10$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=15^2 \longrightarrow 1+2+3+4+5=15$$

……………………………………………………

【型的類推】

問——如果有：

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+100^3=?$$

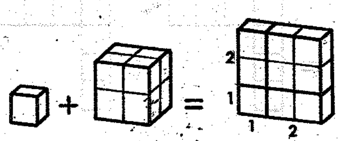
答——得法：

$$1+2+3+\cdots\cdots+100=5050$$

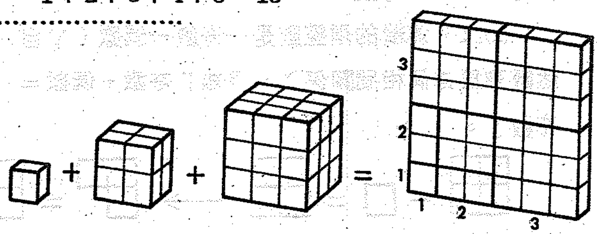
$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+100^3=5050^2$$

【圖化的型】

好像「例二」數式的圖化一樣，從本例題的數式也可以圖形表現如下。但立方數以立方體表現之。



$$1^3 \quad + \quad 2^3 \quad = \quad (1+2)^2$$



$$1^3 \quad + \quad 2^3 \quad + \quad 3^3 \quad = \quad (1+2+3)^2$$

………………………………

【註】對等：

「例1」是把二次方轉變以一次方運算為法。

「例3」是把三次方轉變以二次方運算為法。

例四

【問題】

我們約定：

0	0	1	10	11
+0	+1	+1	+1	+1
0	1	10	11	100

……………

【型的產生】

從此約定，我們可得到其「型」爲：

(1)加法結果——0，1不進位；而以1+1爲進位。

(2)只有0，1兩符號，無2，3，4，……的符號。

依此，我們將可計算：

1101+111=？

得算法爲：

$$\begin{array}{r} 1101 \\ +\ 111 \\ \hline 10100 \end{array}$$

(3)這個「型」，如要表示「奇偶」數，就方便多了。看到個位數是1，就是奇數；個位數0，就是偶數。

(4)這個「型」，與我們的易經「陰陽」說有類同；陽爻「—」，陰爻「- -」。

(5)這個「型」又與我們在討論問題的「是非」表示語類同。

這樣一來，這個「型」就可供我們擴大應用於其他方面的了！

例五

【問題】

有一新記號〖 a 〗表示：

〖 1 〗=1　　〖 1.1 〗=1

〖 1.2 〗=1　　〖 1.3 〗=1

〖 1.4 〗=1　　〖 1.5 〗=2

〖 1.6 〗=2　　〖 1.7 〗=2

〖 1.8 〗=2　　〖 1.9 〗=2

〖 2 〗=2　　〖 2.1 〗=2

…………………………

又應用於計算：

〖 8.7−6.25 〗=2

〖 0.35+3.16 〗=4

〖 $5\times\frac{1}{3}$ 〗=2

〖 2.9 〗+〖 3.5 〗=7

〖 $\sqrt{2}\times2$ 〗=〖 $\sqrt{2}+2$ 〗

〖 2.9+5.5 〗=6

【型的產生】

觀察上面對於新記錄的約定應爲：

〖 a 〗……是整數；是a數的小數點以下爲四捨五入的一整數。

這個「型」的產生，是爲了某種的方便而來。然而有時，因約定了新的記號，另再發生了新的問題；那就是創造性作用了。

我們可以解答下列問題：

問題

(1)〖 7.49 〗=？

(2)〖 0.4 〗=？

(3)〖 3.6×0.7 〗=？

(4)〖 $\frac{1}{3}$ 〗+〖 $\frac{1}{2}$ 〗=？

(5)如果x+〖 x 〗−y+〖 y 〗+〖 x+y 〗−〖 x÷y 〗=0時，x，y應爲小數。求x，y的可能數值。

答案

(1) 7　　(2) 0

(3) 3　　(4) 1

⑸ 1.5 ＞ x ＞ 1.4，0.5 ＞ y ＞ 0.4，且 x，y 的小數點以下的數字必相同。譬如：

$x=1.49$，　$y=0.49$；

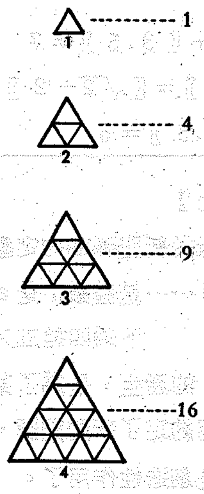
或　$x=1.401$，　$y=0.401$；

……………………

例六

【問題】

畫邊長爲 1，2，3，4，……的各正三角形，又各正三角形均可分割爲邊長爲 1 的正三角形。圖示如下：



………………

【型的發生】

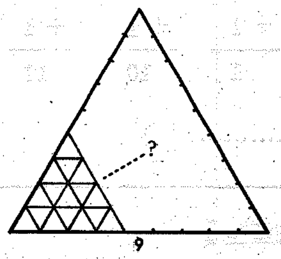
觀察其「型」知，各分割個數爲原形邊長的平方數：

邊長		分割個數
1	⟶	$1^2=1$
2	⟶	$2^2=4$
3	⟶	$3^2=9$
4	⟶	$4^2=16$
……		
n	⟶	n^2

【型的類推】

$\boxed{\text{類題}}$

把一邊長 9 的正三角形，分割成邊長 1 的單位正三角形，可得幾個？

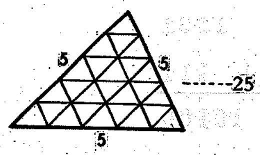


$\boxed{\text{答}}$　$9^2=81$

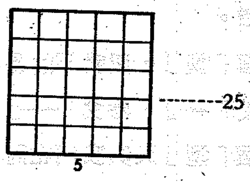
【型的擴展】

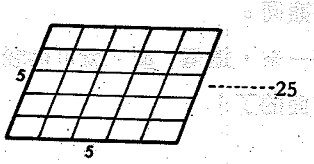
原問題爲「正三角形」的相似形分割與邊長的關係，我們可以再推展到各多角形的可能性。

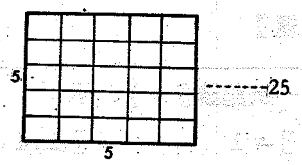
⑴一般三角形——我們是由特殊的正三角形探討問題的，但一般的三角形也能成立，如下圖：



⑵正方形、長方形、平行四邊形，也可能：



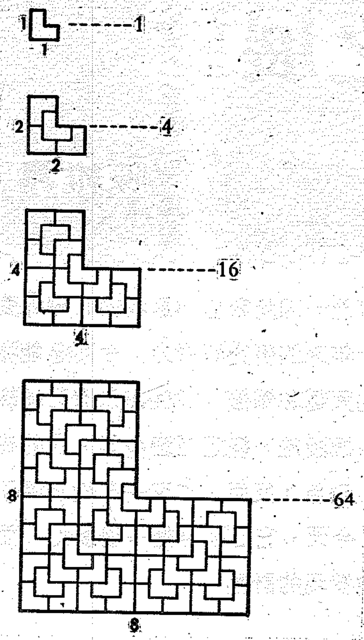




⑶一般的四邊形，不可能。

⑷正五角形、正六角形、……均不可能。

⑸更特殊形的探討——如下圖「凹六邊形」的例子：

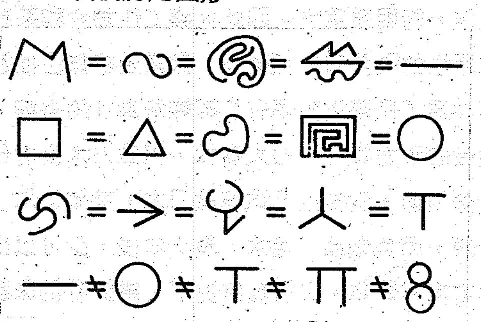


⑹可以再做立體圖形的分割探討等。

例七

【問題】

我們約定圖形：



【型的產生】

這是把圖形的性質，就更爲接近於本質的來探討的問題。它告訴我們：

⑴將不考慮圖形的長度、面積、或角度等的大小計量的關係。

⑵也不考慮圖形的彎曲、折向等「連續變形」的關係。

⑶而注重其圖形有否相交，或斷接等的位相關係。

⑷尊重視覺的直觀，以簡潔的論理來探討自由奔放的圖形。

【問題推展】

依據這樣的約定，試把㈠阿拉伯數字，及㈡英文字母的字形歸類。

㈠得分爲下列5形：

❶ 1＝2＝3＝5＝7
❷ 4
❸ 6＝9
❹ 8
❺ 0

㈡得分爲下列9形：

❶ A＝R
❷ B
❸ C＝L＝M＝N＝S
＝U＝V＝W＝Z
❹ D＝O
❺ E＝F＝J＝T＝Y
❻ G＝H＝I＝K
❼ P
❽ Q
❾ X

結論

㈠從問題中「型」的發現，可知道：問題的結構道理、結構類型，或其結構約定；進而使問題迎刃而解。

㈡由「型」推論，是一種新解法的嘗試，它

（下接第68頁）

則原始分數爲x的理想分數

$$f(x)=\begin{cases}60+(x-a)\dfrac{40}{100-a}, & x\geq a\\ 60-(a-x)\dfrac{60}{a}=\dfrac{60x}{a}, & x<a\end{cases}$$

⑶可視實際需要，作類似轉換：

例⑴，若最高原始分數未達70分，希以30分爲及格，而優秀學生可得高分時，可由

$$\begin{array}{lccccc} \text{原始分數} & 0 & \xleftrightarrow{30} & 30 & \xleftrightarrow{40} & 70 \\ & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \quad \text{轉換之。} \\ \text{理想分數} & 0 & \xleftrightarrow{60} & 60 & \xleftrightarrow{40} & 100 \end{array}$$

例⑵，當試題總分超過100分時，可仿

$$\begin{array}{lccccc} \text{原始分數} & 0 & \xleftrightarrow{80} & 80 & \xleftrightarrow{70} & 150 \\ & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \quad \text{轉換之。} \\ \text{理想分數} & 0 & \xleftrightarrow{60} & 60 & \xleftrightarrow{40} & 100 \end{array}$$

⑷爲便利教師使用，可整理常用「原始分數」換作「理想分數」對照表，因限於篇幅，不擬刋載，需用者，請逕向作者函索。

四、理想分數的價值

作者經兩年試驗後，發現理想分數有下列優點：

⑴使「百分法」產生了稍似「等第法」的效果。

⑵換算十分簡便，易於全面採行。

⑶零分轉換仍得零分，無不勞而獲現象，可避免學生放棄某科目之學習。

⑷換算時可任取適當的及格標準。

⑸教師命題時可配合升學需要，作各種不同難度之測驗；不同程度學生亦可測驗同一難度試題。

⑹ $a>b \Rightarrow f(a)\geq f(b)$，即百分等級較高的學生，其理想分數仍高，可促使學生力爭上游。

⑺每一科目能經合理轉換而得到接近常態分配之成績。

五、實施理想分數的建議

⑴擬訂辦法（可向作者函索範例），並使師生詳知瞭解，以利推行。

⑵印製常用轉換對照表。

⑶每次考試後，需轉換分數之科目，由教學研究會主席會同任課教師決定適當的及格標準，同一程度班級儘可能取用同一標準。

⑷統計分析考試成績時，爲避免誤差，應取原始成績處理爲宜。

⑸成績通知單最好同時塡載原始及理想分數，使家長從原始分數瞭解學生程度，由理想分數知其進步與否？會留級嗎？可能申請獎學金嗎？

⑹如果您怕麻煩，就僅轉換學期成績亦可。

（上接第81頁）

有時只是蓋然推論的認識，這時，如果要求更正確性，應再進一步做嚴格的證明推論。

㈢「型」的探討或設定，有助於問題的發見，產生新問題，並刺激「創造力的開發」。就學習說，也許就是最爲「本質的」啓發學習法；其效果就：不單是「知識的」學習，不再是「塡鴨式的」學習，也不再是「機械式解題技倆的」學習。

㈣以上我們列擧的幾種「型」的例子，是較偏重於興趣化、遊戲化、巧妙化的問題，可供學生學習餘的消遣用。還有各問題的內容，均可再探討發展，更求完善。

㈤此外，我們也許可在一般課程敎材當中發見並構想設計編作其「型」，或其相關的「型」，以配合敎學使用，將可使敎學生動吧！