

$n=3x+2y+z$ 與 $n=5x+2y+z$ 之非負整數解的個數

杜震凡

利用 1 元、2 元、3 元鈔組成 n 元，其組法可如下分析：

1 若 3 元鈔一張也不用，只用 1 元及 2 元鈔，其方法有 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ 種， $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 表等於或小於

$\frac{n}{2}$ 的最大整數。因為所能用 2 元鈔最多為 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 張

，故知若取 q 張 2 元鈔 ($0 \leq q \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$)，則

有 $(n-2q)$ 張為 1 元鈔，而 q 可取 0 到 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

共有 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ 種。亦即當 $x=0$ 時 $n=2y+z$

之非負整數解有 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ 組。

2 若 3 元鈔取用 1 張，則剩下 $(n-3)$ 元以 2 元及 1 元來組成，其方法有 $\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor + 1$ 種。由上可知 $n=3+2y+z$ 之非負整數解有

$\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor + 1$ 組。

3 若 3 元鈔取用 2 張，方程式成為 $(n-6)=2y+z$ ，其非負整數解就有 $\lfloor \frac{n-6}{2} \rfloor + 1$ 組。

4 依此類推，因 3 元鈔最多能用 $k = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$

張，其餘再用 2 元、1 元鈔來湊足，其方法有 $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1$ ，其中 $r = n - 3k$ ，故組法總數為

$$S = (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1) + (\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor + 1)$$

$$+ (\lfloor \frac{n-6}{2} \rfloor + 1) + \dots$$

$$+ (\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1)$$

5 現在只要解出 S 的答案，本問題即可獲得解決。又知對任一正整數 m ， $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor = \frac{m}{2} - \frac{1}{4}$

$$+ \frac{(-1)^m}{4} \dots \dots \dots (1)$$

因為若 m 為偶數，則

$$\text{左邊} = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor = \frac{m}{2},$$

$$\text{右邊} = \frac{m}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{m}{2};$$

若 m 為奇數，則

$$\text{左邊} = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor = \frac{m-1}{2},$$

$$\text{右邊} = \frac{m}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{m-1}{2};$$

故(1)式對任何正整數 m 恒成立。S的答案即可用(1)式來解。

$$\begin{aligned} 6. S &= (\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1) + (\left\lceil \frac{n-3}{2} \right\rceil + 1) \\ &+ (\left\lceil \frac{n-6}{2} \right\rceil + 1) + \cdots + (\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil + 1) \\ &= (\frac{n}{2} + \frac{3}{4} + \frac{(-1)^n}{4}) + (\frac{n-3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{(-1)^{n-3}}{4}) \end{aligned}$$

$$+ (\frac{n-6}{2} + \frac{3}{4} + \frac{(-1)^{n-6}}{4}) + \cdots + (\frac{r}{2} + \frac{3}{4}$$

$$+ \frac{(-1)^r}{4})$$

$$= (k+1) \frac{3}{4} + (\frac{(-1)^n}{4} + \frac{(-1)^{n-3}}{4} + \frac{(-1)^{n-6}}{4}$$

$$+ \cdots + \frac{(-1)^r}{4}) + (\frac{n}{2} + \frac{n-3}{2} + \frac{n-6}{2} + \cdots$$

$$+ \frac{r}{2})。$$

$$\text{令 } P = \frac{(-1)^n}{4} + \frac{(-1)^{n-3}}{4} + \frac{(-1)^{n-6}}{4}$$

$$+ \cdots + \frac{(-1)^r}{4},$$

則當 n, r 皆為偶數時, $P = \frac{1}{4}$;

當 n, r 皆為奇數時, $P = -\frac{1}{4}$;

其他情形時, $P = 0$ 。

$$\text{故 } S = (k+1) \frac{3}{4} + P + (\frac{n}{2} + (\frac{n}{2} - \frac{3}{2}) + (\frac{n}{2}$$

$$- \frac{6}{2}) + \cdots + (\frac{n}{2} - \frac{3k}{2})$$

$$= (k+1) \frac{3}{4} + P + \frac{(k+1)}{2} (\frac{n}{2} + \frac{r}{2})$$

$$= \frac{(k+1)}{4} (3+n+r) + P$$

$$= \frac{3k+3}{12} (n+3+r) + P$$

$$= \frac{(n+3-r)(n+3+r)}{12} + P$$

$$= \frac{(n+3)^2}{12} - \frac{r^2}{12} + P$$

又知若 $r=0$ 或 1 , 則 $|\frac{r^2}{12} + P| \leq \frac{1}{12}$

$$+ \frac{1}{4} < \frac{1}{2};$$

$$r=2 \text{ 時 } P = \frac{1}{4} \text{ 或 } 0, |\frac{r^2}{12} + P|$$

$$= |-\frac{1}{3} + P| < \frac{1}{2}。$$

因此 S 為與 $\frac{(n+3)^2}{12}$ 之差小於 $\frac{1}{2}$ 的一個整數, 所

以 S 的答案獲得解決。 $S = N(\frac{(n+3)^2}{12})$,

($N(\frac{(n+3)^2}{12})$ 表距 $\frac{(n+3)^2}{12}$ 最近的整數)。

7. $9 = 3x + 2y + z$ 之非負整數解之個數應

$$\text{有 } S = N(\frac{(9+3)^2}{12}) = 12 \text{ 個}$$

其解集合為 $\{(3, 0, 0), (2, 1, 1), (2, 0, 3)$

$(1, 3, 0), (1, 2, 2), (1, 1, 4)$

$(1, 0, 6), (0, 0, 9), (0, 1, 5)$

$(0, 2, 5), (0, 3, 3), (0, 4, 1)\}$

8. 由上同樣分析方法亦可找出 $n = 5x + 2y + z$

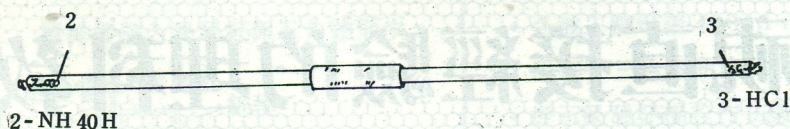
之非負整數解的個數 $S = N(\frac{(n+4)^2}{20})$

$10 = 5x + 2y + z$ 之非負整數解的個數為 $S = N(\frac{(10+4)^2}{20})$

(下接第37頁)

(a)對流：在一支試管中將水加熱至約 90°C 後，放在透明壓克力槽中，在旁邊另放一試管的

冷水，在兩試管中各加入一小粒 KMnO_4 結晶。



(b)每一支 ($13 \times 0.4 \text{ cm}$) 塑膠管 (或玻璃管) 的管口用棉花鬆鬆地塞住 (兩個學生一起做)。取得 2 cm 長的塑膠軟管，將兩管連接如圖。將一端浸入鹽酸，另一端浸入氨水，再將細管平放一小時或一小時以上。

4. 結果和問題

A、在液體中對流

- (1)過錳酸鉀在冷水或在熱水中散播得較快？
- (2)什麼現象顯示過錳酸鉀的密度比水的大？
- (3)在晶體到達試管底後，是否紫色粒子抵抗地心引力而向上擴散？為什麼？

B、氣體擴散：在本實驗中二種反應物是氨氣和氯化氫氣體反應後生成白煙狀氯化銨。

(4)在形成白煙前，這兩種氣體所走距離相等嗎？

(5)既然行走距離不等，一定有一種氣體較輕，擴散較快，是那一種？

(6)兩種氣體從棉花塞到白煙圈各走多少厘米？

(7) NH_3 擴散距離 / HCl 擴散距離 = _____。

(8)你從上面幾題中已有系統的寫出格雷漢姆的氣體擴散定律，氣體擴散速率和下列何者成反比？①密度，②密度平方根。比較擴散速率時，設 NH_3 的密度值為 17， HCl 的為 36.5。

(9)如你的實驗結果不能完全符合格雷漢姆定律，你能想到是什麼因素造成的矛盾現象？能不能防止？

(10)重述格雷漢姆氣體擴散定律，試計算氧氣和氫氣的相對擴散速率，原子量各為 16 和 1。

(11)為什麼試驗格雷漢姆定律時要用毛細管？而試驗 KMnO_4 在水中散播時可用試管？

三、問題的答案

- (1)在熱水中。(2)過錳酸鉀沉到水底。(3)不是紫色粒子的擴散作用，在此實驗，擴散作用幾乎可忽略。是水的局部對流作用使它上升。(4)不相等。(5)氨氣較輕。(6)理想的數據：氨氣走 13 cm ，氯化氫走 10 cm 。(7) $13 \text{ cm} / 10 \text{ cm} = 1.3$ 。(8)密度 (d) 平方根， $\sqrt{d} \text{ NH}_3 / \sqrt{d} \text{ HCl} = \sqrt{36.5} / \sqrt{17} = 1.5$ 。(9)可能由於對流作用引起可觀和誤差 (矛盾)，若用口徑非常小的毛細管，或者可以將對流作用減至最低量，但這樣做要等很長時間 (很多小時) 才能得到實驗結果。(10)氣體擴散速率和 (R) 和它們密度平方根 (或分子量平方根) 成反比。 $R_{\text{H}_2} / R_{\text{O}_2} = \sqrt{32} / \sqrt{2} = 4$ 。(11)毛細管可減少對流作用。

(上接第 46 頁)

$$\frac{(10+4)^2}{20} = 10$$

其解集合為 $\{(2, 0, 0), (1, 2, 1), (1, 1, 3), (1, 0, 5), (0, 5, 0), (0, 4, 2), (0, 3, 4), (0, 2, 6), (0, 1, 8), (0, 0, 10)\}$

參考資料

Yaglom, Challenging Mathematics Problems with Elementary Solutions.