

優選法簡介(上)

黃敏晃

近幾十年來，隨着大工業生產的迅速發展，找出一種科學的方法來安排試驗的需要，成為數學上的急迫任務。例如，怎樣選取合適的配方，合適的工藝過程。另一方面，在一定的質量要求之下，如何使產量最高，生產過程最快，成本最低？換句話說，怎樣做才會有「優質、高產、低消耗」的效果？

為了解決這個問題，人們經過不斷的總結經驗，終於把安排試驗的方法，逐漸發展成爲一種科學方法，就是本文要介紹的“優選法”。

舉個簡單的例子說，煉鋼時要加碳，但究竟每噸鋼中要加多少碳，才能使鋼的強度最高呢？加得太多了會變成生鐵，加少了又會變成熟鐵。這裏就牽涉到優選的問題。此問題只考慮到含碳量這個因素，把其他次要的因素（如火的大小，時間的久暫等）暫時忽略。像這樣，只考慮一個與目標密切有關的因素時，我們稱之爲單因素的優選問題。

要解決上述的問題，當然可以採用大量試驗的方式，來尋求最佳的含碳量。但是，我們要付出很大的代價，造成時間和精力的極大浪費，同時材料也會大量地消耗。假定我們已經發現，最佳含碳量的範圍在每噸 1000 克到 2000 克之間

，如果第一次加碳 1001 克，第二次 1002 克，……，則需要一千次才能測出最佳含碳量。這顯然是極爲笨拙的方式。

優選法的目的，除了提高產品的質量外，還能大大地減少試驗的次數，找出最優方案。譬如上例，若用優選法，只要經過十多次試驗，就能找出最佳含碳量。

單因素的優選問題很多，下面再舉一例說明：在半導體（Semiconductor）工業中，拉製單晶矽（Single Crystal silicon）時，需要加入雜質（Impurity），雜質加少了就會拉出 P 型（Positive）單晶矽，加多了則又拉出 N 型（Negative）低電阻的單晶矽。怎樣精確地控制雜質的多少，使拉製出來的單晶矽既是 N 型，其電阻率（Resistivity）又符合要求呢？由於每批來的原料質地不同，而一批原料只能拉 50 爐左右，過去要試拉 30 爐左右才能找出合適的摻雜量，最後的 20 爐左右才拉製出正品。採用優選法後，只要試拉 6 爐或 7 爐，有時甚至 3 爐就能找到合適的摻雜量。這就保證 43 爐以上能出正品，從而提高了產量，降低了成本。

但是，我們碰到的問題常不是如此簡單，影響目標的因素往往不止一個。例如，在手錶錶殼的電鍍工藝中，電鍍液的配方如何才適合，電鍍時電流密度又要多大才合適？像這樣，要考慮二

個以上與目標密切有關的因素時，就是多因素的優選問題。

多因素的優選問題，情況是比較複雜些，但其解決的途徑也是以單因素的優選法作為基礎。先抓住其中影響目標最關鍵的一些因素，把次要的因素先固定下來，抓準了一、兩個因素進行試驗，逐步把問題簡化，這樣很快地就可以得出比較滿意的結果。

優選法是最近二十多年來，隨着大工業的生產型式而發展出來的。1953年，美國人基弗首先提出黃金分割法和分數法。後來又有人在分批試驗法及在試驗周期長時，不等前批試驗結果出來就提前安排的方法等作了一些工作。多因素方法由於涉及問題複雜，理論基礎比較薄弱，方法却是五花八門，思路也格外分歧。有些方法需要利用電子計算機的幫助，才能實現。現在能解決因素的個數有上百個的，一般也有20個到30個因素的。在應用上除了配方，配比，工藝技術等方面外，還廣泛地應用於設計上。目前還應用於自動控制及近似計算的某些方面。

單因素優選法中兩個基本的方法——黃金分割法和分數法——都牽涉到黃金分割比（golden section），所以這裏先簡略地提一下：當線段 $\overline{AB}$ 上有一點C，使得 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{CB}$ 時，這個比值叫做黃金分割比。

假設 $\overline{AB} = 1$ ， $\overline{AC} = x$ ，則 $\overline{CB} = 1 - x$ ，所以 $1 : x = x : (1 - x)$ ，即 $x^2 + x - 1 = 0$

，解得 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ ，由於 $x = \overline{AC} > 0$ ，負值

不合，取正值得 $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.618$ 。這個數

值又可以下列的分數數列來趨近：

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}, \frac{55}{89}, \dots$$

而這些分數則由下述的費布那齊數列所構成：

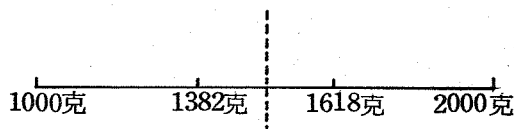
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ……………

由於黃金分割比與費布那齊數列有密切的關係，黃金分割法有時也叫做費布那齊法。

有關黃金分割比與費布那齊數列的詳情，可參閱黃敏晃的文章“漫談費布那齊數列”與“黃金分割比”科學月刊，民國六十三年7月和8月號；或諸明嘉的書“楊輝三角”，人間文化事業公司出版的人間通俗數學講話第二輯第15本，這裏不再多說。

1. 黃金分割法

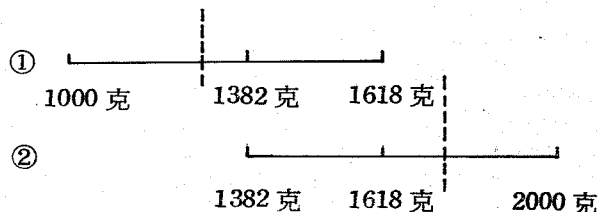
在上述煉鋼的例子中，我們畫出一條線段，表示由1000克到2000克，在0.618處畫一記號，在此記號所指的刻度，即1618克做一次試驗。



然後把此線段對半分（上圖的虛線所示），找一點便與1618刻度關於虛線對稱，此刻度為：

$$1000 + 2000 - 1618 = 1382$$

再按1382克作一次試驗，並把兩次試驗結果進行比較：如果1382克的結果好些，則畫去1618克到2000克的線段，得到下圖①的線段；如果1618克的結果好，就丟掉1000克到1382克的線段，得下圖②的情形。

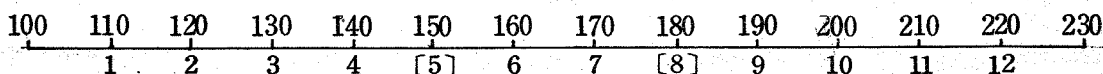


現在再把這樣得到的綫段，按上述步驟進行：把綫段對半分（上圖的虛綫所示），找出1382（上圖①）或1618（上圖②）關於虛綫的對稱點，1236或1764，並按此數據作一次實驗後，進行比較，再去掉一部分綫段。

就這樣，試驗，比較，再試驗，再比較，一次比一次更加接近所需要的碳加入量，直到達到了所要求的精度為止。

在這裏，我們順便回顧一下煉鋼工業的發展史：最早煉出的是生鐵，含碳量為4%，後來煉出了熟鐵，其含碳量幾乎等於0。十八世紀七十年代前的歐洲，正是盛行熟鐵的時代。以後又出現了各種鋼，例如，可以冷壓製成汽車外殼的鋼是含碳量0.15%的低碳鋼，用來做鋼樑的大型工字鋼所要求的是含碳量0.25%的軟鋼，經過熱處理後可以硬化製成車軸，機軸的是含碳量0.5%的中碳鋼，做彈簧、錘、銼、斧等則需要含碳量為1.4%的高碳鋼。

應用黃金分割法，只要比較兩次的試驗結果後，就可以縮小試驗的範圍，每次縮短試驗範圍38.2%（留下的綫段長=0.618×上次綫段長），這樣很快就接近最佳點，我們可以把黃金分割法的步驟歸納如下：在第一個試驗範圍中要取兩個試驗點，第一點與第二點的求法為：



如上圖找出為150與180毫升。以此兩點作試驗，並比較試驗結果。若180毫升效果好，則捨去100到150毫升的這一段，得下圖①；若150毫

$$\begin{aligned} (\text{第一點}) &= (\text{頭}) + [(\text{尾}) - (\text{頭})] \\ &\quad \times 0.618 \end{aligned}$$

（第二點）=（頭）+（尾）-（第一點）
比較兩個試驗點的好壞，縮短試驗範圍。在此新的範圍內，已經有一個好點，只要找另一個新的試驗點，

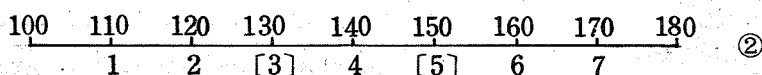
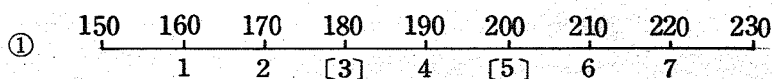
$$(\text{新點}) = (\text{頭}) + (\text{尾}) - (\text{上次留下的好點})$$

2. 分數法

分數法是利用本節最前面所列的分數數列，或費布那齊數列，去安排每個試驗範圍內的兩個試驗點，讓我們以下列兩個實例來說明：

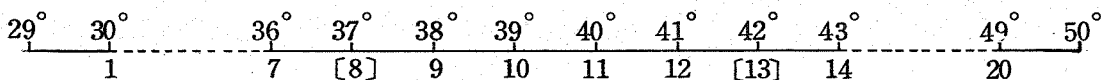
例1 某種合金原件經淬火後，表面產生了一層氧化膜，我們希望把氧化膜去掉，而不損害合金表面的光潔度，於是採用酸洗液來腐蝕合金原件表面的氧化膜。經過一連串失敗的試驗後，終於選定硝酸，對其用量加以優選，優選範圍在100到230毫升之間。

畫一刻度綫段表示100到230毫升，10毫升為一刻度，並在中間的每個刻度下，按順序寫上1，2，3，4，……，在這些數中找出費布那齊數列中出現的最大兩個數作為試驗點：



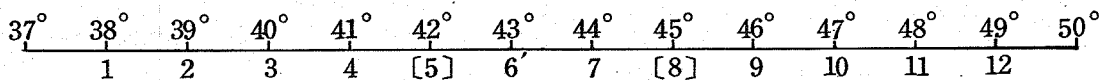
升效果好，則捨去180到230毫升的這一段，得下圖②。

然後對此新得到的試驗範圍，進行如上的步驟，選取新的試驗點。由於費布那齊數列的性質，在新的範圍內所選的兩個試驗點，其中一個必定是原先留下來的點，例如在上圖①中的180毫升，與上圖②中的150毫升，都是上一段留下來的點。這樣就可以每次只做一次實驗，一直到找到好點為止。



費布那齊數列中位於20之前的最大兩個數是8和13，所以最初的兩個試驗點為 37°C 與 42°C ，比較試驗結果，以 42°C 較好，所以去掉 29°C

例2 做卡那霉素生物測定時，按照老辦法的培养溫度是 $37^{\circ} \pm 1^{\circ}\text{C}$ ，測一個樣品需要16到18小時。後來，對溫度進行優選試驗，使用分數法，選取溫度的範圍為 29° 到 50°C ，把溫度分為20個分點（以一度為一檔），如下面的略圖所示。

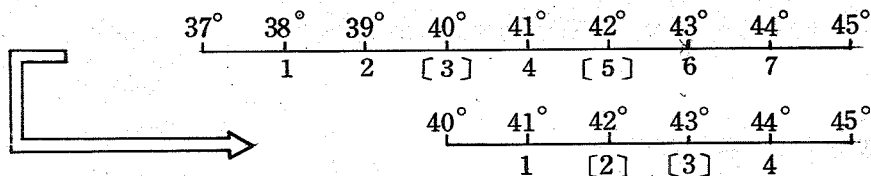


到 37°C 的這一段。新的試驗範圍為 37°C 到 50°C ，共12個分點，重新編號得下圖

費布那齊數列在12之前最大的兩數是5和8，其中 42°C 處已做過試驗，就在 45° 再作一次試驗，並比較試驗結果，還是以 42°C 較好，所以去

掉 45°C 到 50°C 的這一段，得到 37°C 到 45°C 的新範圍。我們繼續做下去，如下圖所示

42°C 的結果
比 40°C 的結
果好，



比較 42°C 與 43°C 的試驗結果，幾乎一樣好，可以停止試驗了，說明培養溫度在 42°C 到 43°C 最為合適。這時的測定時間從原來的16小時縮短成8到9小時。

分數法在有些場合使用起來特別方便，如在機械加工中對機床轉速的優選，因為有些機床的轉速往往分成好幾檔。另外，對找圓形旋轉體（如砂輪，發動機上的轉子等）的平衡位置也是很方便的。

3 平分法

在特殊的場合，使用平分法比上述的兩種方法更加方便。黃金分割法和分數法都是比較兩次試驗結果以後，才能決定試驗範圍的棄或留，但平分法從一次試驗的結果，就可以判斷出試驗點的取值偏低還是過高。

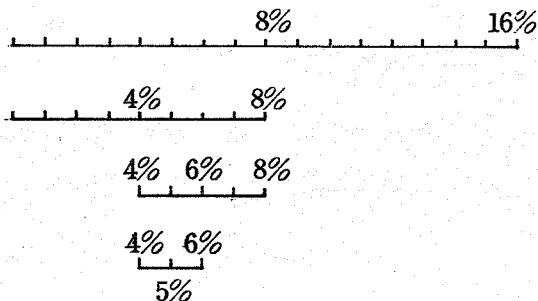
方法是每次取範圍的中點處做試驗，看試驗的結果是偏高還是偏低，從而去掉右半部還是左半部，再在留下的範圍內的中點處繼續做試驗，如此一直下去，直到找出最佳點為止。

平分法比黃金分割法還要快。試看指數方程

$$0.5^x = 0.618^{x-1} \text{ 的解 } y = 1.44x + 1$$

當 $x = 10$ 時, $y = 15.4$ 。可知用平分法做10次試驗的成績, 用黃金分割法做15次試驗也趕不上。

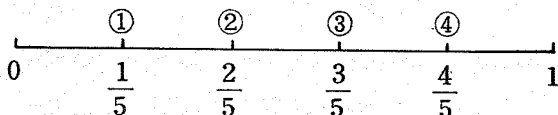
例如某一產品以某種極貴重的金屬為原料, 如果已知使用16%的貴重金屬生產出來的產品, 其質量達到要求的話, 那麼我們是否可以盡量少用些貴重金屬, 而能使產品質量仍然符合要求, 從而大幅度地降低成本?



我們先在平分點 8 % 處做試驗, 如果 8 % 依然合格, 就去掉右半部綫段 (不合格就去掉左半部綫段)。然後在中點 4 % 處做試驗, 如不合格就去掉左半部。再在中點 6 % 處做試驗, 如果合格, 再在 4 % 與 6 % 的中點 5 % 處做試驗, 若仍然合格, 則可照 6 % 的貴重金屬進行生產, 這樣比較保險。

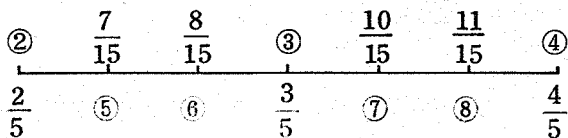
4. 一批可以做幾個試驗的情況

在有多套設備而又可以同時進行試驗的情況下, 為了大大地節省時間, 我們可以採取一批做幾個實驗的方法, 例如一批做四個試驗, 我們先把試驗範圍均分為五等分, 在其中四個分點①②③④上做試驗, 如下圖所示。



比較這四個試驗結果看那個最好? 留下最好的點及其左右兩點。譬如說③最好, 則新的試驗

範圍是②到④, 然後將此範圍六等分, 如下圖所示, 如此繼續做下去, 直到找到最好點為止。



這裏必須注意的是每批試驗的次數都是偶數時, 這種方法是很好的, 但對於每批試驗的次數都為奇數時, 則反而比較麻煩。因為我們沒辦法保持每批試驗的數目一致 (未完待續)

讀者來函

編輯先生:

您好! 貴中心發行之「科學教育雙月刊」第33期中, 省立教育學院林濟卿先生之大作「速能補拙」一文中, 第65頁例二之計算步驟似有錯誤, 全部計算式子應為

$$\begin{array}{r} 13 \\ 39 \overline{) 393} \\ 26 \overline{) 262} \\ 29 \overline{) 299} \\ 117 \overline{) 1196} \\ 78 \overline{) 897} \\ 91 \overline{) 990} \\ 9 \overline{) 99} \\ 9 \end{array} \quad \frac{1}{13} = 0.076923$$

, 敬請查對。

並 頌

編 安

讀者

師大夜間部數學系四年級

陳淑娟 上

69.4.10