專欄　國立臺灣師範大學　數學系

談實數指數的教材

林福來

一、實數指數的定義

嚴密的實數指數的定義，必需以實數的完全性（或稱完備性）當做前引教材，才能介紹。現行的高中數學大綱中〔1〕，第二册第四章第2節是實數的完全性，第五章是指數函數與對數函數。這樣的教材大綱設計，顯然是準備利用實數的完全性，來定義實數指數。比如說，實驗本〔3〕及范傳坡等諸位教授所編着的數理本教科書〔2〕，都是這樣編寫的。其過程都是先有自然數指數 a^n 的定義，由此定義導出指數律；再利用指數律定義零指數 a^0，負整數指數 a^{-n} 及分數指數 $a^{\frac{m}{n}}$。然後對每一個實數 α，選取遞增的有理數列 $\{r_n\}$ 與遞減的有理數列 $\{s_n\}$，滿足

$$r_1<r_2<\cdots<r_n<\cdots<\alpha<\cdots<s_n<\cdots<s_2<s_1$$

且

$$\lim_{n\to\infty} r_n=\alpha=\lim_{n\to\infty} s_n$$

接着考慮數列

$$a^{r_1}<a^{r_2}<a^{r_3}<\cdots\cdots<a^{r_n}<\cdots\cdots$$

及

$$a^{s_1}>a^{s_2}>a^{s_3}>\cdots\cdots>a^{s_n}>\cdots\cdots$$

根據實數的完備性，存在一實數 ξ，使得

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n}=\lim_{n\to\infty} a^{s_n}=\xi$$

因而定義：$a^{\alpha}=\xi$

這樣的實數指數的定義方法，非常嚴密，如果高一的學生能夠瞭解實數的完全性，那麼這樣的定義就非常理想。不過根據許多高中老師的反應，我們發現實數的完全性，大多數同學都感覺很困擾，不容易接受，就算勉強接受，也很難瞭解其中的眞諦。現行的東華本教科書的編者們，在他們所編著的書中〔4〕，已清楚地記下他們對這現象的瞭解，同時也接受了這事實。因此在東華本第二册第六章6－2節中，介紹了零指數，負整數指數與有理指數後，對於實數指數，就避開不談。接下去直接介紹以有理數爲定義域的指數函數 $f(x)=a^x$。最後以下面的一段話，當做實數指數的交待：

……。現在我們要進一步追究：對於任意的一個實數 x，是不是也能使 a^x 有意義，而把函數

$$x\to a^x$$

的定義域從Q推廣到R？由實數的完備性與極限的觀念，可以證明這種推廣是合理而可行的。但

是這方面的理論對高一來說是太深了。現在我們只述明對任意的實數 $a>0$ ，a^x 對每一個 $x\in R$ 都有意義，……

換句話說，東華本的編者們，認爲實數指數的定義必須引用實數的完全性，對高一的同學而言太深了，所以略去。但告訴同學們結論。這種寫法，我個人認爲很好。遺憾的是，如此一來，實數的完全性這部分的教材，變成很孤立。現在來揣測當時東華本的編者們，不得不採取這種寫法的決定，想必也頗費思量。如果不介紹實數的完全性，那麼就有違教育部頒行的教材大綱。可是介紹之後，顧慮及學生的學習能力，又不願引用它來定義實數指數，眞是尷尬。

二、沒有實數完全性當前引的實數指數

不管定義方法有多嚴密，定理有多漂亮，只要知道學生無法接受，那麼該教材就應略去不談。這原則我個人絕對贊成。當然對一些很有用的定理，只敘述其結果，而不追究其所以然，也是必需的。

現在我們假設令學生們頭痛的實數完全性，已從書中刪去，那麼應該如何編寫實數指數的教材呢？以下我們嘗試來草擬一份看看。

假定已經定義了自然數指數，並且利用指數律，定義了零指數，負整數指數及分數指數，同時也假定，關於一次函數，二次函數，多項函數及它們的圖形，已經介紹過，下面的草擬教材，就是專門要介紹無理數指數。

草擬教材

設 $a>0$ ，對於所有的有理數 x ，我們已經定義了 a^x 。例如，$2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$，$2^0=1$，$2^2=4$，$2^{\frac{3}{2}}=(\sqrt{2})^3=2\sqrt{2}$，$2^{1.7}=2^{\frac{17}{10}}=(\sqrt[10]{2})^{17}$ 等等，本小節中，我們要看能不能將 a^x 的定義推廣至所有的實數 x？比如說符號 $2^{\sqrt{3}}$ 應該如何定義？

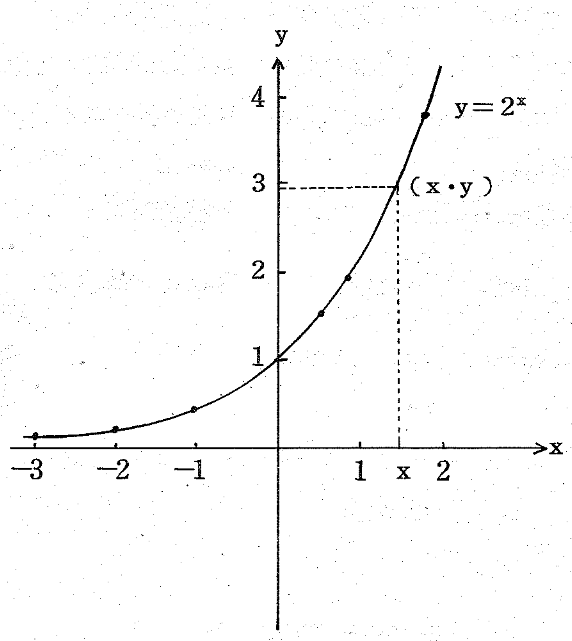
考慮函數 $y=f(x)=2^x$ ，因爲到目前，只定義了分數指數，所以 x 的範圍只能限定爲有理數。現在我們想將它推廣到實數。

首先我們選一些有理數 x ，求出 x 的對應數 2^x，如下表

x	…	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	…
$y=2^x$	…	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$	4	…

（表 1 ）

將表 1 中的這些點（ x ，y ），以平滑的曲線連接起來。如下圖 2



（圖 2 ）

利用圖 2 ，對於每一個實數 x ，我們都可以找到一個點（ x ，y ），y 就是 2^x 。比方說，

$2^{\sqrt{3}}$ 等於多少呢？

因爲 $\sqrt{3}=1.732\cdots\cdots$

所以考慮數列

$$2^{1.7}\ ,\ 2^{1.73}\ ,\ 2^{1.732}\ ,\cdots\cdots$$

其中第一項的指數 1.7 是 $\sqrt{3}$ 化成小數時，取至小數點後一位的近似值，第二項的指數 1.73 是 $\sqrt{3}$ 化成小數時，取至小數點後兩位的近似值，……，第 n 項的指數是 $\sqrt{3}$ 化成小數時，取至小數點後 n 位的近似值。換句話說，

$$1.7\ ,\ 1.73\ ,\ 1.732\ ,\cdots\cdots$$

是一個越來越接近 $\sqrt{3}$ 的數列。我們所考慮的數列

$$2^{1.7}\ ,\ 2^{1.73}\ ,\ 2^{1.732}\ ,\cdots\cdots$$

是一個遞增的數列，但是恆比 2^2 小。這種數列會越來越接近某一個正實數，這個正實數就是 $2^{\sqrt{3}}$。它大約等於 3.3320 。

一般而言，對於任意的正實數 a 與任意的實數 x，我們都可以像 2^x 那樣來定義 a^x 。利用像求 $2^{\sqrt{3}}$ 的逼近方法，也可以求得 a^x 的值。這樣定義實數指數之後，我們還可以證明，對任意的實數指數，指數律仍然成立。即

指數律：設 $a,b>0$，$r,s\in R$，則

(1) $a^r\cdot a^s=a^{r+s}$

(2) $(a^r)^s=a^{r\cdot s}$

(3) $a^r\cdot b^r=(ab)^r$

關於上面這段草擬的教材，歡迎各位專家、老師們多多指教。

參考資料

〔1〕我國高中科學課程概況。師大科教中心編印。

〔2〕范傳坡等著，高中數學第二冊，數理出版社。

〔3〕高中數學實驗教材第二册。

〔4〕李新民等編著，高中數學第二册，東華書局。

（上接48頁）

溝通，是很有效果的一種方式，打破了以往觀摩會或研習會的窠臼。（陳鏡潭教授、魏明通教授的專題演講，頗受參加研習教師之歡迎，將刊印在專刊中）

三、對於教材之改進，將有很大的貢獻

由問卷調查統計結果可知；化學教師，對現行教材的修訂與改進，有很寶貴的意見。可供修訂教材之有關人員參考。

（57頁圖五）