專欄

省立高雄師範學院　數學系

有關二進位記數法的兩則遊戲

金玉麒

今天我們所用的記數法，是以十爲底，或稱爲十進位的記數法，任一正整數 a 可表爲如下形式：

$$a=C_n10^n+C_{n-1}10^{n-1}+\cdots+C_110+C_0$$

其中 $n\geqslant 0$ 爲整數，C_n，C_{n-1}，…C_1，C_0 中每一個都是 0，1，2，……9 等十個數字中的某一數字，例如：$1979=1\times10^3+9\times10^2+7\times10+9$。同理，任一正整數 a，若以 b 爲底（b 是大於 1 的正整數），則

$$a=C_nb^n+C_{n-1}b^{n-1}+\cdots+C_1b+C_0$$

其中 C_n，C_{n-1}，…C_1，C_0 是小於 b 且大於或等於 0 之整數且 $n\geqslant 0$ 爲整數，如果 $b=2$ 則

$$a=C_n2^n+C_{n-1}2^{n-1}+\cdots+C_12+C_0$$

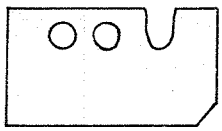
其中 C_n，C_{n-1}，…，C_1，C_0 必是 0 或 1 兩個數字中之一，故正整數用二進位表示時，如下表所示：

十進位數	二進位表示法
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
⋮	⋮

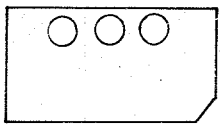
遊戲(一)：整理卡片法

今有卡片八張，每一張是相同的矩形且在右下角剪去相同的一角。依次編號爲 0，1，2，3，4，5，6，7 等，各化爲二進位記法後，遇 0 時，卡片上邊對應位置打一圓洞，遇 1 時，對應位置剪一缺口，例如：

“001”做成



“000”做成



然後把八張卡片次序弄亂，再收疊起來，但缺角要對齊，用一根細長棒穿越卡片上邊最右打洞位置，輕輕提起，卡片中最右邊有打洞者如 0，2，4，6 四張被鐵絲舉起，其他卡片最右邊有缺口者如 1，3，5，7 四張則脫落下來，把脫落的卡片照原來次序放置在其他卡片之後，缺角仍對齊，再照同樣方法處理自右邊算起第二洞、第三洞。經過三次操作後，八張卡片自上至下，依次爲 0，1，2，3，4，5，6，7。

問題一：爲什麼經過三次操作後，1 號必在 0 號之後？2 號必在 1 號之後？……7 號必在 6 號之後？

問題二：你想把卡片中的 7 號放在第一張，

6號放在第二張，依次排列，應該如何操作？

問題三：如果要整理10000張卡片，需要多少次操作？

遊戲㈡：猜測年齡法

上面所討論到1，2，3，4，5，6，7等七個數，如果表爲二進位記數法時，1，3，5，7最右邊位的數字是1，我們把這四個數寫在一張卡片上；又2，3，6，7之第二位數字是1，把它們寫在一張卡片上；又4，5，6，7之最左邊位的數字是1，把它們也寫在一張卡片上。如圖所示：

(A)

1，3，5，7

(B)

2，3，6，7

(C)

4，5，6，7

在(A)卡片中所列各數，它們二進位記數法中，最右邊位的數字是1，表示是1與其他數之和；卡片(B)中所列各數，在二進位記數法中，自右算起第二位數字是1，表示是1×2與其他數之和；同理，卡片(C)中各數，表示1×2^2與其他數之和。因此如果某甲的年齡，(A)(B)(C)三卡片都有的話，則某甲的歲數爲$1+1\times2+1\times4=7$。

問題四：如果我們計算的範圍包括自1歲到63歲時，則需要多少張卡片？

本文參考資料：

1. Long: Elementary Introduction to Number Theory.

2. Krulik: Aids for Teaching High School Mathematics.

3. Pedoe: The Gentle Art of Mathematics.

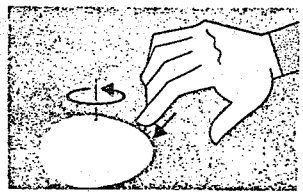
4. 數學——人類的傑作　（高雄師院數學系編）

有　獎　徵　答

1. 熟蛋與生蛋的不同

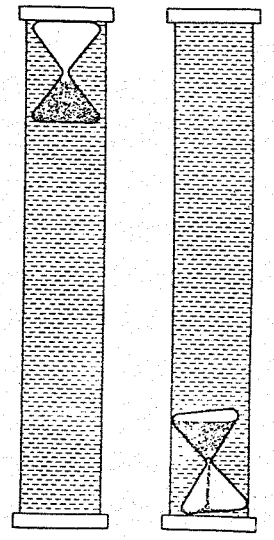
(a)熟蛋能夠直立而生蛋則不能，何故？

(b)將蛋橫放轉動，再用手指停住並迅速離開後，生蛋能繼續轉動而熟蛋則不能，何故？



2. 太陽對地球的吸力較太陽對月球的吸力要小上一倍左右，但月球仍不離地球而飛向太陽，何故？

3. 將沙鐘放在水筒中，如(a)情況則浮予頂，如(b)情況則沉予底，能說出其中原因嗎？



(a)　　(b)

* 題目取於「The Flying Circus of Physics」Jearl Walker 著。

* 來函應徵辦法請參閱33期