專欄　省立教育學院　科學教育系　數學組

# 太陽明天仍會上升嗎？

林英雄

本來這是不成問題的問題，但居然還有人拿來當作研究的題目。這確實是很新鮮的事。研究這個問題的人是何等人物？他究竟用了什麼方法？得到什麼結果？又給了我們什麼啓示？顯然是我們很想迫切知道的事。

在回答這一連串的問題之前，先讓我們就這個問題作一番檢討：我們認爲太陽每天上升應是天經地義，永恒不變的眞理。人們常解釋不可能發生的事情爲「除非太陽從西方上升」。即使太陽有一定的壽命，我們也無法確知，也不必知道。不是有一句古詩這樣寫着嗎？「前不見古人，後不見來者，念天地之悠悠，獨滄然而涙下」。因此討論這方面的問題顯然是很愚蠢，自不量力；或套一句成語來說，是「杞人憂天」的了！但話說回來，凡是我們不知道的事情，多半可用機率的觀點來解釋，祇要有適當的資料的話。

拉普拉斯（Laplace）〔1749—1827〕就這樣的把這個太陽天天上升的過程當作一種隨機過程（random process）。他很巧妙的利用有關條件機率問題的貝氏定理（Bayes's theorem）來研究這個問題，結果他得到了所謂的「拉普拉斯連續規則」(Laplace's Law of Succession)，發表於西元一八一五年。此連續規則確曾引起人們的一陣的騷動與爭論。本文將對此詳加說明，並提出個人的觀感。

在說明拉普拉斯連續規則之前，先介紹一下貝氏定理，及其與拉普拉斯連續規則之關係。貝氏定理可見於一般高中數學的課本裡，它是一個證明簡單但却很重要的定理，係貝氏於西元一七六三年所發表的有名定理。往往一件事情的發生有前因（Cause）與後果（effect）的關係，可用路線表明，此爲「樹枝圖」。在樹枝圖上，我們對整個事件的「來龍去脈」，比較容易掌握。尤其當我們想從已發生的「事實」，推知其「來路」，查究其原因時，對每一可疑點的研判，最有效的方法莫過於貝氏定理。

定理（貝氏定理）：設一樣本空間 S 由互斥的事件 $A_1$，$A_2$，……$A_n$ 所組成；即 $S=\bigcup_{j=1}^{n} A_j$；且對不同的 i，j，$A_i \cap A_j=\phi$；且 $A_i$ 均不爲空集合。設 B 爲一事件，且 $P(B)>0$，則下面關係式恒成立：

$$P(A_i \mid B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)}$$

$i=1, 2, \cdots\cdots n$。

證：（從略）

式中B爲「後果」，Ai均爲「前因」。按照自然發生的順序，Ai發生在前，B發生在後。但現在我們想計算B發生之後，這個旣成事實發生自各個Ai的機率爲何？故此定理又稱求「回溯原因」的機率的定理。式中，P(Ai)稱爲事前機率（Priori probability），P(B)稱爲事後機率（Posteriori probability）；故所求之機率係由此兩已知機率計算而得。但P(Ai)往往不易給予，常須根據實際情況而定；故易造成錯誤的推論。這也是貝氏統計推論容易受人詬病之處。

現在讓我們回到「太陽上升」的問題上面。太陽每天上升眞正的機率我們是不得而知的，正因爲我們不知道，故須將所有各種可能的情形列舉出來，然後以各種可能的情況爲前導，得到所求太陽明天仍會上升的機率。故自然而然就要用到貝氏推論的方法了。

例題（拉普拉斯連續規則）：設太陽已連續上升n次，試求仍再上升的機率爲何？

解：首先我們確認太陽每天上升的眞正機率（亦即事前機率）必爲一常數，但其確實值爲何？我們無法得知。故其爲0與1之間的某一常數。且其爲0與1之間的每一數均有可能；我們認爲每種可能「機會均等」（with equal likelihood）。亦即這個機率可視爲一隨機變數$\xi$，其分配爲閉區間〔0，1〕的均勻分配（uniform distribution）。故$\xi$的機率密度函數f爲

$$f(p)=1，其中\quad 0\leq p\leq 1。$$

因此$\xi=p$的機率$p(\xi=p)$（因$\xi$爲一連續隨機變數，嚴格來說應以$P(p\leq\xi\leq p+dp)$表之）爲

$$P(\xi=p)=P(p\leq\xi\leq p+dp)=1\cdot dp\quad 0\leq p\leq 1。$$

現假設$\xi$的眞實值爲p，則在此假設下，太陽連續上升n次的機率爲$p^n$（因太陽連續上升的n次事件可視爲獨立事件）。設$s^n$表「太陽連續上升n次」的事件，其中n爲任意正整數，則 $P(s^n\mid\xi=p)=p^n$。

由貝氏定理可知

$$P(s^n)=\sum_{0\leq p\leq 1}P(\xi=p)P(s^n\mid\xi=p)$$

這種寫法顯然無意義，但若將「和」改用「積分」符合表示，則得

$$P(s^n)=\int_0^1 P(p\leq\xi\leq p+dp)\,P(s^n\mid p\leq\xi\leq p+dp)=\int_0^1 p^n dp=\frac{1}{n+1}$$

再求$P(s^{n+1})$，然後相除，即得

$$P(s^{n+1}\mid s^n)=\frac{P(s^{n+1}\cap s^n)}{P(s^n)}=\frac{P(s^{n+1})}{P(s^n)}=\frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}}=\frac{n+1}{n+2}。$$

這是拉普拉斯對太陽上升問題的解答。

當初拉普拉斯的證法，以今日的術語來說，係用「壺甕術」（urn model）來硏究此一太陽連續上升的隨機問題。太陽上升比喩爲從裝有紅球、白球的袋中取一紅球。但袋中紅球與白球的比例無法確知，正表示太陽每日上升眞正的機率無法確知一樣。故本問題相當於已知N＋1個袋均裝有N個球，其中第一個袋子裝有0個紅球，其餘均爲白球，第二個袋子裝有1個紅球，其餘均爲白球，以此類推；任選一袋，然後從此袋中

連續取出n個紅球，每次取出，均須放回，則第n＋1次亦爲紅球的機率卽爲所求太陽明天仍將上升的機率。（其中每袋及袋中每球被選中機會相等）。其解法與上同（可參閱〔2；P.123〕或〔3；P.113〕）。

拉普拉斯應用「數學的模式」到實際的問題的技巧確實很高明。但仍留下一些問題不易解決；例如，如何知道太陽每日上升眞正的機率的分配爲均勻分配？若不是，則又該如何算？太陽上升是確定的（deterministic）？抑或隨機的現象（random phenomenon）？若屬隨機的現象，則拉普拉斯所使用的「壺甕術」是否合理？總之，拉普拉斯連續規則的證法充滿了自覺的（heuristic)方法，故亦招致了不少的怨尤。例如W. Feller在其書中卽批評此證法有辱於貝氏定理的價值（見〔2；P.124〕）。而此連續規則有兩個具體應用的例子，一個很合理，另一個却很不合理。第一例爲旅客到了陌生的地方，恐怕食物中毒，飲食非常小心翼翼。在某一飯店點了一道菜，吃了以後，發現沒有中毒，如此連續在該飯店吃了10次同樣的菜都沒有中毒，依拉普拉斯連續規則，此旅客第11次吃同樣菜不中毒的機率爲$\frac{11}{12}$，這是很合理的。但另一例子是，依拉普拉斯連續規則，10歲的孩子能多活一歲的機率爲$\frac{11}{12}$，而82歲的老公公能多活一歲的機率則爲$\frac{83}{84}$，這實在是一個荒謬的結論（見〔3；P.114〕）。

不管如何，個人認爲此一規則是頗有價值的。正如同幾何公設體系，由適當的公設出發而形成的一數學模式。在應用到實際例子時，難免都會有一點差距，在乎人如何適當選擇數學模式，而非數學模式之過。它比較適合「規律性」的現象，用來解釋過去經驗中一連的成功，而更增加對此「規律性」的信心，如太陽每日上升然。至於誤用此一規則，係因所觀察的現象缺乏規律性，而無法完全由過去的經驗來推知未來的事。總之，此一「連續規則」是一良好的結果，它奠定了數學模式應用的範例。

**參考資料：**

1. Kai Lai Chung 著：Elementary Probability Theory with Stochastic Processes。
2. W. Feller著：An Introduction to Probability Theory and its Applications Vol.1。
3. 黃提源著：機率論。

（上接62頁）

至熔點以下。⒃特殊的是萘蒸氣不先凝成液體，而直接凝成固體。相反的，大部分物質如水蒸氣等冷却時，它先變成液態水，再轉變成固態。⒄固態萘浮在液態萘上，上面是萘蒸氣，在試管中部有平坦的、片狀萘結晶。⒅在試管中部片狀結晶下可能看到液體的閃閃發光。⒆長的針狀結晶。⒇從昇華的萘蒸氣直接凝成固體形成片狀結晶，從液態萘冷至熔點以下形成針狀結晶。㉑在試管底部是固態萘，在它上方是針狀萘，再上面，是平坦的片狀萘。㉒不正確，可以嗅到防蠹丸的臭味，所以在固體表面上必有一些萘蒸氣。㉓沒有，沒有，有，只有物理變化。㉔a，c，f，h，i。