國立臺灣師範大學　數學系

近似值四則運算的誤差

陳銘德

一、引　言

近似值是一個含有誤差的數值，從所含誤差的大小，可以判定這近似值的準確程度。如果將近似值作四則運算，則所得到的和、差、積、商，當然也會含有誤差，本文將對它們的誤差情形作一探討。

二、有關名詞

(1)誤差

在日常生活中，表示某種數量觀念的數，叫做眞值。但是在實際問題中，有時不可能求到準確的眞值，有時不需要求到準確的眞值，我們常常割切它的尾數，求得一個與眞值接近的數，作為眞值的近似值。近似值與眞值的差的絕對值，叫做這近似值的誤差。即

$$誤差=|眞值-近似值|$$

(2)相對誤差

誤差與眞值的比，叫做相對誤差。即

$$相對誤差=\frac{誤差}{眞值}$$

(3)最大可能誤差

用指定單位來測定一個數量的近似值時，它所產生的誤差，不會超過指定單位度量的一半，這個數就叫做這近似值的最大可能誤差。

$$最大可能誤差=\frac{1}{2}(指定測量單位度量)$$

(4)近似相對誤差

最大可能誤差與近似值的比，叫做近似相對誤差。即

$$近似相對誤差=\frac{最大可能誤差}{近似值}$$

例1　某校共有學生 4252 人，如以百人為單位，用四捨五入法，取 4300 人作為該校學生人數的近似值，則它的

$$誤差=|4252-4300|=48（人）$$

$$相對誤差=\frac{48}{4252}=0.011^{+}$$

$$最大可能誤差=\frac{1}{2}(100)=50（人）$$

$$近似相對誤差=\frac{50}{4300}=0.012^{-}$$

三、近似值四則運算的誤差

(1)和與差的誤差

設 a 、 b 是兩個近似值，且 $a>b$

a 的最大可能誤差為 r_1

b 的最大可能誤差為 r_2

則 a 的眞值 x 必介於 $a-r_1$ 與 $a+r_1$ 之間

b 的眞值 y 必介於 $b-r_2$ 與 $b+r_2$ 之間

即　$a-r_1 \leq x \leq a+r_1$　(A)

$b-r_2 \leq y \leq b+r_2$　(B)

(i) 將(A)+(B)，得

$(a+b)-(r_1+r_2) \leq x+y \leq (a+b)+(r_1+r_2)$

$|(x+y)-(a+b)| \leq r_1+r_2$

$x+y$ 通常以下列式子來表示

$x+y=(a+b)\pm(r_1+r_2)$

其意即 $x+y$ 以近似值 $a+b$ 來近似的最大可能誤差爲 r_1+r_2。也就是說兩近似值的和的最大可能誤差等於這兩近似值最大可能誤差的和。

(ii) 將(B)×(−1)，得

$-b-r_2 \leq -y \leq -b+r_2$　(C)

(A)+(C)，得

$(a-r_1)+(-b-r_2) \leq x+(-y) \leq (a+r_1+(-b+r_2)$

$(a-b)-(r_1+r_2) \leq x-y \leq (a-b)+(r_1+r_2)$

$|(x-y)-(a-b)| \leq r_1+r_2$

則 $x-y$ 可表爲

$x-y=(a-b)\pm(r_1+r_2)$

所以 $a-b$ 的最大可能誤差爲 r_1+r_2。也就是說兩近似值的差的最大可能誤差等於這兩近似值最大可能誤差的和。

應注意者，在取 $a+b$ 與 $a-b$ 的近似值時，所取用的測量單位，不能小於在取 a、b 時所用的任一測量單位。

例2　求兩近似值 3.14 公尺與 2.678 公尺的和與差。

解：　3.14 公尺的測量單位是 0.01 公尺，所以它的最大可能誤差是 0.005 公尺

2.678 公尺的測量單位是 0.001 公尺，所以它的最大可能誤差是 0.0005 公尺

所以 3.14 公尺與 2.678 公尺的眞值 x 與 y 分別位於

$3.14-0.005 \leq x \leq 3.14+0.005$

$2.678-0.0005 \leq y \leq 2.678+0.0005$

即　$3.135 \leq x \leq 3.145$

$2.6775 \leq y \leq 2.6785$

由此兩式可得

$3.135+2.6775 \leq x+y \leq 3.145+2.6785$

$3.135-2.6785 \leq x-y \leq 3.145-2.6775$

即　$5.8125 \leq x+y \leq 5.8235$

$0.4565 \leq x-y \leq 0.4675$

所以 $x+y$ 與 $x-y$ 可分別表爲

$x+y=5.818\pm0.0055$

$x-y=0.462\pm0.0055$

因 3.14 公尺 2.678 公尺所用的測量單位以 0.01 公尺爲較大，所以求和與差所用的測量單位是 0.01 公尺，因此

$3.14+2.678=5.818=5.82^-$

$3.14-2.678=0.462=0.46^+$

所以它們的和是 5.82 公尺，差是 0.46 公尺，最大可能誤差都是 0.0055 公尺。

(2)積與商的誤差

設 a、b 是兩個近似值

a 的最大可能誤差爲 r_1，近似相對誤差爲 $\frac{r_1}{a}$

b 的最大可能誤差爲 r_2，近似相對誤差爲 $\frac{r_2}{b}$

所以 a 與 b 的眞值 x 與 y 分別位於

$a-r_1 \leq x \leq a+r_1$　(A)

$b-r_2 \leq y \leq b+r_2$　(B)

(i) 將(A)×(B)，得

$(a-r_1)(b-r_2) \leq xy \leq (a+r_1)(b+r_2)$

$ab-ar_2-br_1+r_1r_2 \leq xy \leq ab+ar_2$

$+br_1+r_1r_2$

因 r_1r_2 的值通常很小，略去不計，由上式可得

$$|xy-ab|\leq ar_2+br_1$$

xy 可表爲

$$xy=ab\pm(ar_2+br_1)$$

所以ab的最大可能誤差約爲 ar_2+br_1

ab的近似相對誤差約爲

$$\frac{ar_2+br_1}{ab}=\frac{r_1}{a}+\frac{r_2}{b}$$

也就是說兩近似值的積的近似相對誤差約等於這兩近似值的近似相對誤差的和。

(ii)由(B)，得

$$\frac{1}{b+r_2}\leq\frac{1}{y}\leq\frac{1}{b-r_2} \qquad \text{(D)}$$

(A)×(D)，得

$$\frac{a-r_1}{b+r_2}\leq\frac{x}{y}\leq\frac{a+r_1}{b-r_2} \qquad \text{(E)}$$

而 $\frac{a-r_1}{b+r_2}=\frac{(a-r_1)(b-r_2)}{(b+r_2)(b-r_2)}=$

$$\frac{ab-ar_2-br_1+r_1r_2}{b^2-r_2^2}$$

$$\frac{a+r_1}{b-r_2}=\frac{(a+r_1)(b+r_2)}{(b-r_2)(b+r_2)}=$$

$$\frac{ab+ar_2+br_1+r_1r_2}{b^2-r_2^2}$$

因 r_1r_2 及 r_2^2 的值都很小，略去不計，則上二式可寫成

$$\frac{a-r_1}{b+r_2}=\frac{ab-ar_2-br_1}{b^2}=\frac{a}{b}-\frac{ar_2+br_1}{b^2}$$

$$\frac{a+r_1}{b-r_2}=\frac{ab+ar_2+br_1}{b^2}=\frac{a}{b}+\frac{ar_2+br_1}{b^2}$$

則(E)式可寫成

$$\frac{a}{b}-\frac{ar_2+br_1}{b^2}\leq\frac{x}{y}\leq\frac{a}{b}+\frac{ar_2+br_1}{b^2}$$

即 $\left|\frac{x}{y}-\frac{a}{b}\right|\leq\frac{ar_2+br_1}{b^2}$

$\frac{x}{y}$ 可表爲

$$\frac{x}{y}=\frac{a}{b}\pm\frac{ar_2+br_1}{b^2}$$

所以 $\frac{a}{b}$ 的最大可能誤差約爲 $\frac{ar_2+br_1}{b^2}$

$\frac{a}{b}$ 的近似相對誤差爲

$$\frac{ar_2+ar_1}{b^2}\div\frac{a}{b}=\frac{r_1}{a}+\frac{r_2}{b}$$

也就是說兩近似值的商的近似相對誤差約等於這兩近似值的近似相對誤差的和。

應注意者，在取ab與 $\frac{a}{b}$ 的近似值時，所取用的測量單位，不能小於在取 a 與 b 時所用的任一測量單位。

例 3. 求兩近似值 1.256 與 0.37 的積與商

解： 1.256 的測量單位爲 0.001 所以它的最大可能誤差爲 0.0005。

0.37 的測量單位爲 0.01，所以它的最大可能誤差爲 0.005。

所以 1.256 與 0.37 的眞值 x 與 y 分別位於

$$1.256-0.0005\leq x\leq 1.256+0.0005$$

$$0.37-0.005\leq y\leq 0.37+0.005$$

即 $1.2555\leq x\leq 1.2565$

$$0.365\leq y\leq 0.375$$

由此二式，可得

$$(1.2555)\cdot(0.365)\leq xy\leq(1.2565)\cdot(0.375)$$

$$\frac{1.2555}{0.375}\leq\frac{x}{y}\leq\frac{1.2565}{0.365}$$

即 $0.4582575\leq xy\leq 0.4711875$

$$3.3480000 \leq \frac{x}{y} \leq 3.4424658$$

因 $ar_2 + br_1 = (1.256)(0.005) + (0.37)(0.0005)$

$= 0.006465$

$= 0.01^-$

$$\frac{ar_2 + br_1}{b^2} = \frac{0.006465}{(0.37)^2} = 0.04722425 = 0.05^-$$

$$\frac{r_1}{a} = \frac{0.0005}{1.256} = 0.00398089$$

$$\frac{r_2}{b} = \frac{0.005}{0.37} = 0.01351351$$

$$\frac{r_1}{a} + \frac{r_2}{b} = 0.000398089 + 0.013513514 = 0.013911603 = 0.01^+$$

因1.256與 0.37 所取用的測量單位以0.01較大，所以求積與商所用的測量單位也是用0.01，因此

$$(1.256)\cdot(0.37) = 0.46472 = 0.46^+$$

$$\frac{1.256}{0.37} = 3.3945945 = 3.39^+$$

所以 xy 與 $\frac{x}{y}$ 可分別表為

$$xy = 0.4647225 \pm 0.006465 \quad (約)$$

$$\frac{x}{y} = 3.3952329 \pm 0.04722425 \quad (約)$$

故1.256與0.37的積為0.46 ，它的最大可能誤差為 0.01 ，近似相對誤差為0.01

又1.256與0.37的商為3.39 ，它的最大可能誤差為 0.05 ，近似相對誤差為0.01。

（上接18頁）

危險並不見得少，生物學實驗室研究方面由微生物傳播感染的危險可能性亦是事實。在我們的生活科學範圍內有許多X射線機器做為各種醫療和研究。X射線眞正是很危險的，在生物學及生物化學方面許多實驗包括使用放射性同位素，這也是很危險的，最近使用電子顯微鏡的情形非常普遍，在某種操作情況下電子顯微鏡轉變成X射線發生器。

現在美國有危險性生物學委員會（Biological Hazards Committee ）負責評估新的生物學研究計劃危險性，這個委員會的主席用訓練檢查，然而他的研究興趣是細菌學。

八、結論

實驗室的安全應該受到最大的注意而不流於形式，對於科學敎育確實是很重要的一件事，因為許多有危險的實驗室工作是不為人注意或被輕視，有些是專門知識不為外人所能知其祕密，實驗室安全知識範圍確實很廣，如何去審查評估實驗室危險性，希望對於危險加以防止減至最低可能。最好各單位定時常檢查各項安全設施，或者設立實驗室安全評估組織，不論有無確實效果，最低限度他具有科學敎育的意義和價值。

參考文獻

1. Truhaut.R & Murray, R., Nat. Arch. Occup. Environ. Health, 1978, 41, 65

2. Thorpe, J.J. Hydrocarbon Processing, 1978, 57, 172

3. Harry spencer, Chemistry and Industry, 1979, No.3

4. Carcinogenisis bioassay report, Bethesda, Ma: National Cancer Institute, 1976