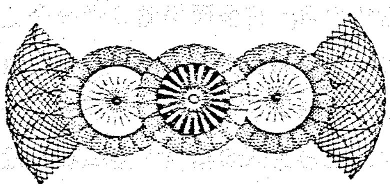
高中幾何該教些什麼？(上)



Irving Adler 著

台北市立中正高中 林聰勤譯

譯者按——

原文取自美國數學教育協會出版的數學教師月刊（The Mathematics Teacher， 1968 年3月號）。本文雖已登出十年之久，却屬於檢討當時風頭甚健的S.M.S.G. 新數學教材的文章，目前看來，還有其深長的意味。尤其是國內最近又開始了另一個高中數學的實驗工作，我們誠懇地希望，外國的經驗能給我國一些幫助，使我們在通往成功的歷程中，少走一些不必要的冤枉路。又此譯文經台大數學系的黃敏晃教授費心訂正，特此致謝。

一、歐幾里得的幾何原本犯了什麼錯誤？

歐幾里得所著的幾何原本（Euclid's Elements，下文簡稱原本），自成書後的這兩千年來，一直被公認為是最典型的幾何教本，主宰著世界各國的中學幾何教育。但在廿世紀的六十年代中，原本却受到嚴厲的批判，並由此導致了幾何教育的重大改變。為了明白這種改變的來龍去脈，我們必須先回答下列的問題：原本到底犯了什麼錯誤？

對此問題的一個明確答案，由德國有名的幾何學家克萊恩於 1908 年提出（參看Felix Klein 的書Geometry, in Elementary Mathematics from Advanced Standpoint, Dover版本p.188～208），五十年後又由美國中學數學課程改革運動的領導人之一的梅德加以重述（參看A. E. Meder Jr. 的文章What is wrong with Euclid? 刊於The Mathematics Teacher, 1958年十二月號 p.578～584）。他們指出，原本中有關教材處理方面有下列三個弱點：

1. 比起與歐氏同時期的阿基米德（Archimedes）的數學作品，原本在數值計算的使用方面有所欠缺，原本也不像阿氏那樣把所得的結果加以廣泛的利用，導得新結果的處理手法也不如阿氏用啓發式那樣引人入勝，致使學生學習原本時有很大的困難。

2. 由於古希臘時期算術與代數的發展相當不成熟，使得歐氏採用了一些麻煩的幾何性的結果作為代替品（參看原本第二卷中的幾何代數及第六卷中有關比與比例部份）。

3. 原本中有些邏輯結構上的缺陷，其中包括：沒能體認到**不定義名詞**的需要性（如點、線，面等最基本的名詞，無論如何定義都不能使人滿意——譯者註：這點實在是現代數學家的苛求，因為這點一直要到十九世紀末，數學界才搞清楚此需要）；公設公理體系上不完全（如次序公設根本遺漏，參看Hilbert 的小書Foundation of Geometry）：在使用疊合法作為證明手段的一

些證明中，使用了循環論證（參看原本第一卷，或上面提到的克萊恩的書 p. 199）。

下面，我們再加上一條理由，來說明歐氏原本或其大同小異的改寫本與縮減本，爲什麼不適宜當作今日的幾何教本。

4. 自歐氏所處的時代到今天，幾何學有相當程度的發展。對於歐氏幾何學的研究，現在已有幾種新的方向，例如，利用笛卡兒坐標的解析幾何；利用同時介紹射影幾何與雙曲幾何來拱托出歐氏幾何特性的處理手法等。所以，歐氏幾何的教本寫法，不一定是古董比較值錢，而要看學習者能接受那一類貨色，才能決定優劣。

二、中學幾何教本的改寫

世界各國的許多數學教師，在不滿意歐氏的原本或其大同小異的改寫本或縮減本的情況下，早已嘗試了許多改進方案，在幾何課程中引進了種種改變，以克服上述的缺點。下面列出十種改革方案，這些方案都已在各國以不同的組合方式進行了實驗：

1. 採用希爾伯特（David Hilbert）所介紹的公理公設體系，以改正歐氏原本中在邏輯結構上的缺點（參看Hilbert 的Foundation of Geometry，國內有翻版）。

2. 把平面幾何與立體幾何同時推展結合。

3. 提早介紹一些測度的概念，如線段的長、角度、以及平面圖形的面積等。

4. 依賴一些實數的性質，如美國數學家伯克荷夫的提議（見Birkhoff 的文章，A set of postulates for plane geometry based on scale and pratractor, Annals of Math, vol. 3, 1932；或Birkhoff 與Ralph 的書，Basic Geometry, New York, 1941）。

5. 利用坐標幾何來取代。

6. 採取向量的方法來處理。

7. 使用平面上的測體運動（剛體運動的特徵性質是保持距離不變，所以又叫保距運動——isometries）來處理。參看 Levi 的書 Topics in Geometry, Prindle-Weber-Sclemidt, 1968。

8. 包括一些非歐幾何的材料（見Moise 的書 Elementary Geometry from an Advanced Standpoint, Addison-Wesley）。

9. 把歐氏空間看成爲帶有內積運算的向量空間，如笛歐唐尼所提議的作法（參看 Dieudonné 這方面的Lecture note）。

10. 把歐氏平面看成坐標化的仿射平面（affine plane），並把實數系用來作爲此仿射平面中直線上點的坐標所成的數集，此外在仿射平面中引入垂直的概念（參看Choguet, Geometry in a Modern Setling, Hermann）。

三、美國中學幾何教材之改變

美國各州差不多都是在十年級（由小學算起，相當我國學制中的高一）較正式地引入幾何課程，目前有許多不同的新幾何課程正在編寫，或正在試驗當中（譯者註：指 1968 年當時，S. M. S. G.新教材的塵埃未落定的狀況）。其中最有名的是由S. M. S. G. 所編寫的兩本書"幾何"與"坐標幾何"。美國中學的新幾何課程的編排，主要是基於以上所列的頭五種改變，按各種不同的百分比而得到各種不同的組合。比較特別的只有兩個：一個由伊利諾大學的學校數學會所研究發展出來的新幾何課程，特別着重於上述第九種方案；另一個由魏氏里安大學（Wesleyan Univ.）所發展的新幾何教材，則着重於上述的第十種方案。

這裡想舉一個例子來說明這些改革的細節。三角形的全等，在任何中學幾何課程中，都是個重要的題材，S. M. S. G. 所編寫的兩個教本自

不例外。但在該小組所編的幾何這個教本中，全等三角形一直拖到第97頁才第一次出現。按一學年的上課情形來考慮，要在這學年過了六分之一（即第一學期的第一次月考）後，學生才會碰到這個主題。在該小組所編寫坐標幾何這個教本中，全等三角形在第225頁才姍姍來遲，即在第一學期過了一半之後的事情，有令人有壓軸角色後出場的感覺。

以上的例子說明了：即使由同一組研究團體所編寫的不同教本，由於所採取的方針不同，可以產生非常不同的效果。這個例子也清楚的說明了，我們不可能把所有好的建議統統放入同一個教本。換句話說，我們勢必在這許多構想中有所選擇。魚與熊掌的取決，當然按各種教本編者的脾胃，每位教師也有其選擇的餘地，不管這種選擇是在那一階層，我們都得面臨兩個問題：其一是中學幾何教材到底該顯現些什麼教材？採用怎樣的數學精神與方法處理這些材料？其二是如何組織編寫才能使學生易於接受？

後一個問題牽涉較廣，學生的個別差異甚大，使我們感到討論極為困難，所以我們把這個問題以順水推舟的太極拳式，推給比較高明的朋友去討論。關於前一個問題，我們準備先檢討幾何的本質，以及中學幾何課程的教學目標，由這兩方面出發，嘗試給出一個答案。我們希望這個討論，能為我們指出將來編寫幾何教本的新方向。

四、幾何的本質

下面，我們想就目前所知道的幾何學的四項重要特徵，逐項加以討論：

1.幾何是真實物理空間的一個模式

幾何中所談到基本素材如點、線、面與角等本來是取自物理空間的實物，經過理想化後的產物，而它們之間的關係，也非常接近於物理空間中相應實物間的關係。

過去，歐氏幾何所描述的空間，曾一度被認為是眞實物理世界的唯一模式。然而，現在我們已經曉得其他種幾何所描述的空間，用來當作眞實物理空間的模式是一樣好的。如果我們假定眞實物理世界是個曲率為常數的黎曼空間（Riemauntec Space），則僅有下列三種可能：曲率為0時，歐氏空間是適當的模式；曲率為正時，黎曼發展出來的橢圓空間是適當的模式；曲率為負時，高斯、波利亞（Bolyai）與羅巴契夫斯基（Lobachevski）幾乎同時發展出來的雙曲空間才是適當的模式（參閱Coxeter的書An Introduction to Geometry, N. Y. John Wiley & Son, 1961）。

2.幾何的公理公設體系

上述的三種幾何都由它自已特有的一套公理公設體系所構成，換句話說，每一種幾何的研究都由某些不定義名詞與一些名為公設的假設開始（譯者註：一些有關量的公理是包含在內，或不特別說出來而假定成立的）。然後，以這些公設為立論的基礎，利用演繹法來證明定理。

歐氏空間的公設中有些是與橢圓空間與雙曲空間共同的公設。然而，至少有一個公設（平行公設）是與橢圓與雙曲空間的相應公設大為不同的。

3.幾何是研究圖形與空間在某些變換群的所有變換下不變的量和性質的學問

自從1872年，克萊恩在他有名的爾朗哥計劃（Erlangen program）中提出這種看法後，幾何的研究一直沿著這種看法所指示的方向（參看Coxeter的文章，爾朗哥計劃百年回顧，Mathematical Intellegencia vol 0, 1972）。

從這個觀點來看，在歐氏空間中全等圖形的研究，只是剛體運動下不變性研究的一部份，而

相似圖形的研究，則是相似變換（相似變換保持兩直線的交角不變，所以又叫做保角變換）群下不變性研究的一部份。

4.幾何與代數的密切關係

笛卡兒（Descartes）與費馬（Fermat）創造了解析幾何之後，幾何的概念就可用純粹的代數術語加以界定。譬如，歐氏平面中的一點可視爲有序實數對，一直線是滿足方程式 $ax+by=c$ 的點所成的集合等等。按照這個理由，有人認爲幾何是代數的一個分支。

但是，我們目前也知道，一些基本的代數結構如體（field），能用純粹的幾何術語加以界定。譬如，我們可用仿射平面上的一些幾何作圖定義出一直線上的點的加法和乘法；然後證明，在這種加法和乘法運算下，一直線上的點構成一個體。有趣的是，乘法交換律的成立，竟然是 Pappus 定理的系定理。由此，我們可以同樣有力的下個結論，代數是幾何的一個分支。

由於這個互相包容的密切關係，我們可以清楚地看出，代數與幾何在本質上是研究相同的主題，只不過分別從不同的觀點出發，並使用不同的方法來研討罷了。

五、高中幾何的學習目標

我認爲下列的五個重要目標，是高中的幾何課程中必須達到的？

1.探討以前學過的幾何事實之間的關係。

2.介紹空間的變換（transformations of space）在幾何研究中所扮演的角色。

3.熟練一些技巧（下文會加以詳述）。

4.培養批判性的思考能力。

5.促進對數學模式這種概念的了解。

下面，我們將這些目標逐項加以詳細討論，希望由此看出，我們的高中幾何課程應作如何的改變，才能實現上述的目標。

六、關係的探討

上述的第一項目標，是探討以前所學過的一些幾何事實之間的關係。在美國傳統的課程裡，這一向是十年級（高一）幾何的主要目標。學生在較早的各年級，早已學到大量的幾何知識，但這些幾何事實散布於各處，並沒有組織起來。到了十年級，學生才開始學到這些事實並不是互相獨立的，其中一部份可以由其他的事實用演繹論證的方式得到；當他們學到幾何是建基於一組公理公設上的演繹體系後，他們就明白了這件事。

我們可以找到許多很好的理由來說明，爲什麼在十年級的幾何中要強調公理公設化的演繹論證。首先，這是很重要的一個論證形態，而每個人都應該學會並加以讚賞。其次，十年級學生的心智發展，已經成熟到可以接受這種形式化論證的程度。第三，幾何用來展示演繹論證法是一個理想的題材，因爲(1)它已被完全公設化了，(2)它本質上是有趣的，由於它直接關係到學生對物理空間的直覺經驗，(3)它不會受到一些偏見和情緒的影響與糾纏。在其他的題材中，這些偏見和情緒常妨礙了客觀性的思考。

然而，在十年級的幾何中，我們對演繹論證所強調的幅度，必須依據實際的需要而決定。不幸的，在最近的十年中，強調演繹論證的呼聲越來越高，而這種需要却越來越弱。強調呼聲的增高，原因是要補足歐幾里得的公理公設體系中的破綻。爲此，我們加上了有關次序的公設，然後由此用演繹法推論出許多性質，而這些性質在以前只是隱約地被假設成立而已。結果，在S.M.S.G.課程中，一學年的六分之一到四分之一的時間，全用來致力於平面上有關次序和分隔性質的演繹論證。

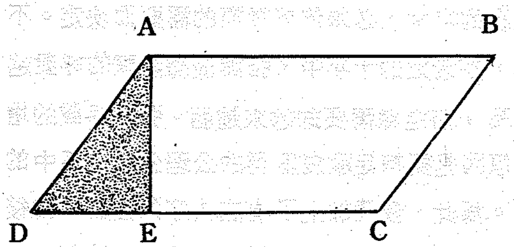
事實上，強調演繹推論的需要，目前正在減

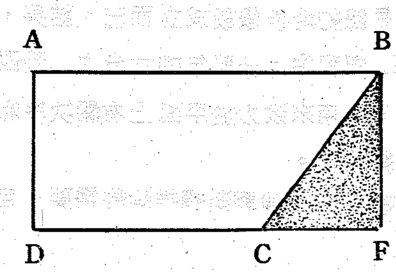
少之中。在過去，學生要到十年級的幾何課中，才會第一次碰到嚴格的演繹推論的經驗，但目前情形已有改變。由於最近十年間中學數學課程的改變，學生在九年級的代數，甚至於在七年級與八年級的算術中，就得到了演繹推論的經驗。因此，在十年級的幾何課程中，演繹論證並不需要目前我們所給的所有關注。

如果在十年級的幾何課程中不再特別強調演繹論證，我們就可以省出一些時間，補充更有價值的教材。下面，我提出兩點建議以節省時間：

1.把平面上的次序與分隔公設及相應的性質，用較簡略更直觀的方式來討論；甚至只要提起某些性質可以證明，而不要去作煩瑣的證明。一般說來，不論我們如何表達，這些證明都無法令學生激賞，他們很難看出有什麼需要，去證明一些直觀上很明顯的事物。

2.加速處理求面積的問題（從矩形面積開始，到平行四邊形、三角形和梯形的面積），學生在九年級甚至更早，就藉著視覺教具的幫助，以非正式的但却嚴格的方式，把這些面積公式導出來了。舉個例子說，平行四邊形的面積公式可由下列的圖形中，看出△ADE全等於△BCF而得到（底乘以高）。這雖不算是個嚴格的證明，但





却包含了一個嚴格證明所需用到的所有基本概念，以及正確的方向。在這種情況下，強調正式而嚴格的證明不但對學生毫無助益，甚至會使學生感到，正式而嚴格的證明只在證明一些明顯而無聊的事物，把他們退化成笨蛋的數學例行公事罷了。

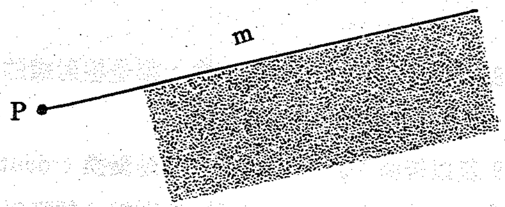
七、變換

上述的第二項目標，是介紹空間的變換在幾何中所扮演的角色。為了達成此項目標，十年級的幾何課程中應包含平面上的保距變換的討論。一種做法是仿照丹麥中學裡的做法，把保距變換的觀念當作中心角色來看待。我個人認為我們不妨選幾個學校來做實驗，譬如說，採用Guggenheimer的書Plane Geometry and Its Groups中所提的公設組。另一個比較溫和的改變，是使用S. M. S. G. 書中所提的經修改過的希爾伯特公設組，並採用簡短的小單元的方式來介紹保距變換。我認為這些小單元應包含下列的教材：

1.保距變換的定義：平面上的一個保距變換是從平面到自身的一個一對一的映射。由於它的特徵性質是保持距離（或長度）不變，因而得名，保距變換又叫剛體運動。

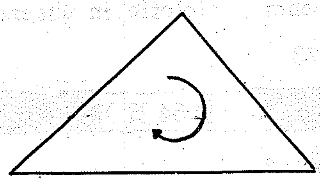
2.保距變換可以合成：兩個保距變換S與T的合成是一個保距變換，記作ST，其效果等於，先作變換S接著再作變換T的效果一樣（應以實例說明）。如果把這些變換看成元素，合成作為運算，則平面上的保距變換構成一個變換群（或運動群）。

3.平面的剛性原理：此原理可藉下圖所示的旗形結構加以表達，設P是平面上一點，m是以P為頂點的一條射線。射線m所在的直線將此面分割成兩個半平面，設h是其中一個半平面，下圖的斜影部份表示h所在的位置。因下圖的斜影部份令人想起以m為旗桿的旗子，所以我們暫時

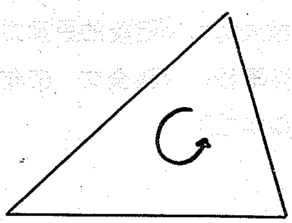


把P點、射線m和半平面h所決定的結構（P，m，h）稱爲旗形結構。設（P，m，h）與（P′，m′，h′）是平面上的兩個旗形結構，則平面上的剛性原則是說，平面上恰有而且只有一個保距變換，使得（P，m，h）變成（P′，m′，h′），即使P點落到P′點，射線m移到m′的位置，而半平面h與半平面h′重合，此原理是直觀上很顯然的，所以當作一個公設看待，當然，要由希爾伯特的公設來加以證明也不頂難。

4.平面的定向性：沿著一個三角形的周界走，剛好有兩個方面，即順時針與逆時針方向，如下圖所示。

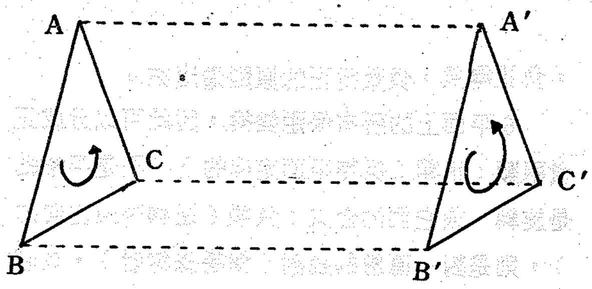


順時針方向

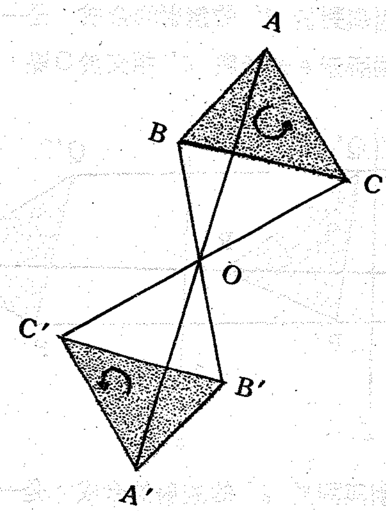


逆時針方向

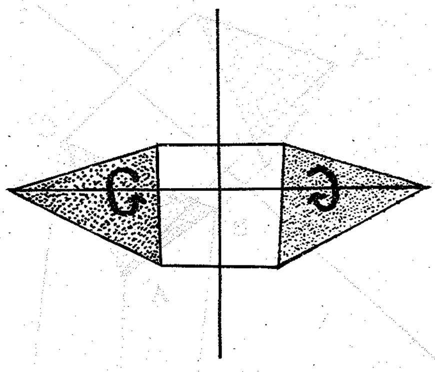
5.平面上的每一個保距變換，都保持平面的定向，或逆轉平面的定向。例如，平移是保持定向的，如下圖所示。旋轉也是保持定向的。特別是，旋轉 180° 時就是對旋轉中心點的鏡射（簡



稱點鏡射），也保持了定向，如下圖所示。



但對於一直線的鏡射，則是逆轉定向的，如下圖所示。

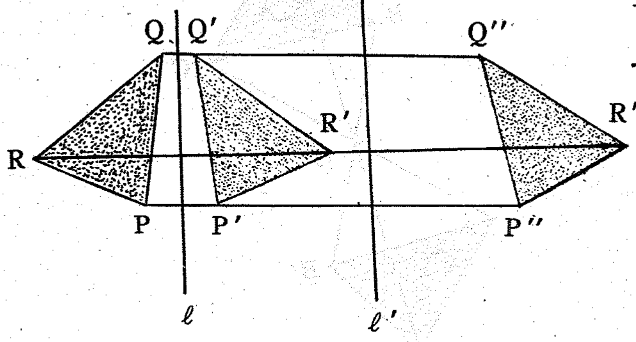


如果把保持定向的保距變換用正的表示，逆轉定向的保距變換用負的表示，則合成的保距變換是否保持或逆轉定向，就可用正正得正，正負得負

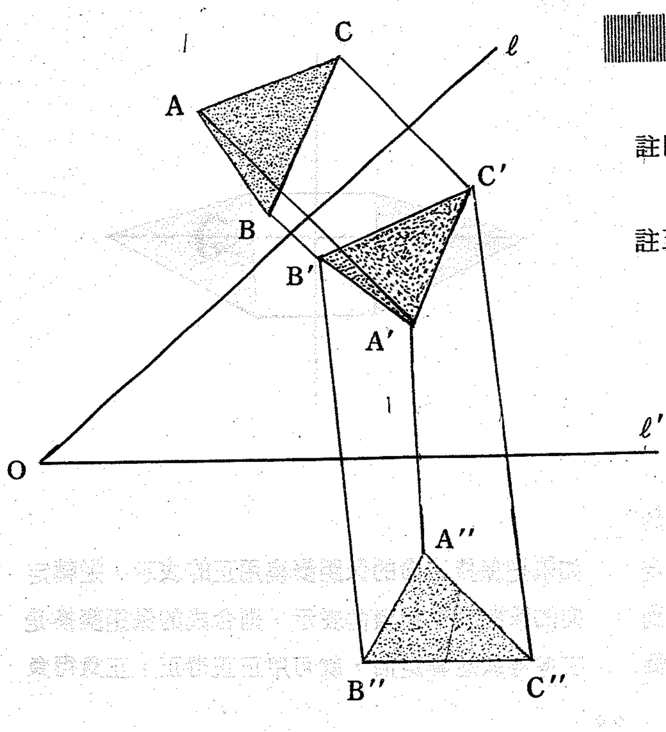
，負正得負，負負得正的原則看出來。

6.平面上的所有保距變換，因此可以分成正負兩類：正類（保持平面定向的），不是平移就是旋轉，或它們的合成；負類（逆轉平面定向的），則是對一直線的鏡射（簡稱線鏡射），或它與正類保距變換的合成。

7.線鏡射的合成：若直線ℓ與ℓ'平行，則對於ℓ的鏡射與對於ℓ'的鏡射的合成，是一個平移，如下圖所示。若ℓ與ℓ'相交於O點，則



對於ℓ的鏡射與對於ℓ'的鏡射的合成，是一個旋轉，如下圖所示（注意到$\overline{OA}=\overline{OA'}=\overline{OA''}$，$\overline{OB}=\overline{OB'}=\overline{OB''}$，$\overline{OC}=\overline{OC'}=\overline{OC''}$）。



8.平面上的每一個保距變換，都是線射線的合成，最多只要用到三個線射線。

9.若以符號1表示平面上的不動變換（ideuty transformation），R_ℓ 表示對於直線ℓ的鏡射，R_P 表示對於P點的點鏡射，則有$R_\ell R_\ell=1$，$R_P R_P=1$。

（待續）

（上接58頁）

4.實驗㈢中不同年齡幼苗之向性表現在程度上有所差異，其原因爲何？

十二、參考資料

1.易希道，最新植物生理學，環球書局，19 1974。

2.繆端生，吳淳，生物學（上），維新書局，1972。

3.Carl Leopold , Kriedemann , plant growth and development , 1975

4.Schonbohm , Biolofie in unserer Eeit , vol.5 , 1973

（上接54頁）

中心編印。

註四：日本新科學課程簡介　國立師範大學科學教育中心編印。

註五：使科技成爲帶動建設的原動力　蔣院長在全國科學技術會議全文　67年元月31日中央日報第二版。