專欄　省立高雄師範學院　數學系

整除與互質

彗星

常有機會看到中學生在解下面二種形式的問題：

(一)小於或等於1000，能被3，5或7所整除的正整數有多少個？

(二)小於或等於1260與1260互質的正整數有多少個？

我們不希望一一去數，事實上這兩個問題只需代入公式，很容易得到答案。因此了解公式的來源及如何使用是必須的，而且解(一)(二)的原理是相同的。下面我們來看公式如何得來。首先看二個結果(A)和(B)：

(A)令X為任一正數，〔X〕表小於或等於X的最大整數，例如〔2，5〕=2，$[\frac{1}{7}]=0$。

由此，令N，M為正整數，若M比N小，則$[\frac{N}{M}]$的值即為小於或等於N，能為M整除的正整數的個數；若N能為M整除，則$[\frac{N}{M}]=\frac{N}{M}$，為小於或等於N，有公因數M的正整數的個數；若M比N大，則

$$[\frac{N}{M}]=0$$

(B)假如S為一有限集合，令#（S）表示S中元素的個數，下面我們討論的集合都是有限集合。則若有A、B二集合，$A\cup B$中元素的個數等於A中元素的個數加上B中元素的個數減去$A\cap B$中元素的個數，可表為$\#(A\cup B)=\#(A)+\#(B)-\#(A\cap B)$。若是三個集合$A_1$、$A_2$、$A_3$，則

$$\#(A_1\cup A_2\cup A_3)=\#(A_1)+\#(A_2)+\#(A_3)-\#(A_1\cap A_2)-\#(A_1\cap A_3)-\#(A_2\cap A_3)+\#(A_1\cap A_2\cap A_3)$$

推廣到n個集合A_1，A_2，……，A_n時，即得通式

$$\begin{aligned}&\#(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\\&=\#(A_1)+\#(A_2)+\cdots\cdots+\#(A_n)\\&\quad-\#(A_1\cap A_2)-\#(A_1\cap A_3)\cdots\cdots-\#(A_{n-1}\cap A_n)\\&\quad+\#(A_1\cap A_2\cap A_3)+\#(A_1\cap A_2\cap A_4)\\&\quad+\cdots\cdots+\#(A_{n-2}\cap A_{n-1}\cap A_n)\\&\quad+\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\quad+(-1)^{n-1}\#(A_1\cap A_2\cap\cdots\cdots\cap A_n)\quad(\mathrm{I})\end{aligned}$$

有了(A)和(B)，問題(一)和(二)可一般化如(C)和(D)：

(C)若N為一正整數，P_1，P_2，……，P_n為小於或等於N，且兩兩互質的正整數，以K（N）表小於或等於N且能為P_1，P_2，……，或P_n所整除的正整數的個數，則由(B)之（Ⅰ）式及(A)，可得

$$K(N)=\left[\frac{N}{P_1}\right]+\left[\frac{N}{P_2}\right]+\cdots\cdots+\left[\frac{N}{P_n}\right]$$

$$-\left[\frac{N}{P_1P_2}\right]-\left[\frac{N}{P_1P_3}\right]-\cdots\cdots\cdots-$$

$$\left[\frac{N}{P_{n-1}P_n}\right]$$

$$+\left[\frac{N}{P_1P_2P_3}\right]+\left[\frac{N}{P_1P_2P_4}\right]$$

$$+\cdots\cdots\cdots+\left[\frac{N}{P_{n-2}P_{n-1}P_n}\right]$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}\left[\frac{N}{P_1P_2\cdots\cdots P_n}\right] \quad (\text{II})$$

(II)式中當 $N=1000$，$n=3$；$P_1=3$，$P_2=5$，$P_3=7$ 時，(一)之解可得

$$K(1000)=\left[\frac{1000}{3}\right]+\left[\frac{1000}{5}\right]+\left[\frac{1000}{7}\right]$$

$$-\left[\frac{1000}{3\times5}\right]-\left[\frac{1000}{3\times7}\right]-\left[\frac{1000}{5\times7}\right]+\left[\frac{1000}{3\times5\times7}\right]$$

$$=333+200+142-66-47-28+9$$

$$=543$$

那麼小於或等於 1000 且不能爲 3 或 5 或 7 整除的正整數的個數就是 $1000-543=457$ 個了。再看一個例子，小於或等於 2050且能爲 3，7，10 或 11所整除的正整數的個數，由(II)，$N=2050$，$n=4$；$P_1=3$，$P_2=7$，$P_3=10$，$P_4=11$

$$K(N)=\left[\frac{2050}{3}\right]+\left[\frac{2050}{7}\right]+\left[\frac{2050}{10}\right]+$$

$$+\left[\frac{2050}{11}\right]-\left[\frac{2050}{3\times7}\right]-\left[\frac{2050}{3\times10}\right]$$

$$-\left[\frac{2050}{3\times11}\right]-\left[\frac{2050}{7\times10}\right]-\left[\frac{2050}{7\times11}\right]$$

$$-\left[\frac{2050}{10\times11}\right]+\left[\frac{2050}{3\times7\times10}\right]$$

$$+\left[\frac{2050}{3\times7\times11}\right]+\left[\frac{2050}{3\times10\times11}\right]$$

$$+\left[\frac{2050}{7\times10\times11}\right]-\left[\frac{2050}{3\times7\times10\times11}\right]$$

$$=683+292+205+186-97-68-62-29-26-18+9+8+6+2-0$$

$$=1091$$

(D)若N爲正整數，且N可表爲質數 P_1，P_2，…，P_n 的乘積，即 $N=P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\cdots P_n^{\alpha_n}$，令 $P(N)$ 表小於或等於N且與N互質的正整數的個數；因 P_1，P_2，……，P_n 皆爲N的因數，(II)式中〔 〕皆等於整數，$K(N)$ 則表小於或等於N且與N有公因數的正整數的個數，則

$$P(N)=N-K(N)=N-\frac{N}{P_1}-\frac{N}{P_2}-\cdots\cdots\cdots-\frac{N}{P_n}$$

$$+\frac{N}{P_1P_2}+\frac{N}{P_1P_3}+\cdots\cdots+\frac{N}{P_{n-1}P_n}$$

$$-\frac{N}{P_1P_2P_3}-\frac{N}{P_1P_2P_4}-\cdots\cdots\cdots$$

$$-\frac{N}{P_{n-2}P_{n-1}P_n}$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+(-1)^n\frac{N}{P_1P_2\cdots\cdots P_n}$$

$$=N\left(1-\frac{1}{P_1}\right)\left(1-\frac{1}{P_2}\right)\cdots\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{P_n}\right) \quad (\text{III})$$

(III)式中，當 $N=1260=2^2\cdot3^2\cdot5^1\cdot7^1$

（下接 47 頁）

三、結論

每一個國家的教科書，都與這個國家的教育制度有密切的關係，因此，教科書的編撰，由於各個國家的國情不同，都有其獨特的方法。現在，我們就科學教科書從編撰到使用之間的一切過程，歸納成下面的四種方式：

(1)全國統一，使用一種教科書：

蘇俄、東德和非律賓諸國。

(2)採用審定制度的國家：

日本、法國和西德諸國。

(3)可以自由選用的國家：

美國（但仍須經過審查委員會審定合格的才能選用）。

(4)可由教師自由選用的國家：

英國。

我國當前科學教科書的使用，在國民教育階段，採行全國統一制，但高中階段則可由教師自行選用經教育部審定合格的教科書。在英國，雖然准許教師自由選擇，可是，教科書的選用標準，仍然需要配合國家的「檢定考試」，如「GCE」或「CSE」等。因此，多少也有若干限制，總而言之，不論是那個國家，在義務教育階段，科學教科書絕不能和這個國家的教育內容脫節。因此，任何一個國家的科學教科書的內容和趨向，必須配合自己國家科學教育的基本政策。

有關科學教科書內容的編訂，全世界每一個國家都在積極的努力研究改進，重視學生的「知性發展階段」而分別將教材儘量配合學生的學習能力。另外一個不容忽視的問題，那就是幾乎每一個國家都在努力將「能源問題」和「環境科學問題」編入教科書中。因為這個緣故，有些國家就將國民教育階段的自然科學科目採用「綜合科目課程」或是「統合科目課程」，就一般情況來說，許多國家仍然是採用分科制度的比較多。

在本文中，我們沒有將日本部份納入，對於美國部份也沒有作較詳細的介紹，因為這兩個國家的教育制度和概況，在很多報章雜誌中都有過很詳細的報導。

（上接76頁）

，即 $n=4$，$P_1=2$，$P_2=3$，$P_3=5$，$P_4=7$；$\alpha_1=2$，$\alpha_2=2$，$\alpha_3=1$，$\alpha_4=1$ 時，(一)之解可得

$$P(1260)=1260\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)$$

$$=288$$

那麼小於或等於1260的各正整數中與1260有公因數的就有972個了。我們再看一個簡單的例子，求小於或等於225與225互質的正整數的個數，由（Ⅱ）可得

$N=225=3^2\cdot5^2$，$n=2$，$P_1=3$，$P_2=5$

$\alpha_1=2$，$\alpha_2=2$

$$P(N)=225\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=120$$

（上接80頁）

(5)台北市國中教師訓練班；國民中學學生讀書不感興趣的可能原因，國中學生困擾問題之研討，P1～9 民58年。

(6)高雄師範學院物理系課程之研究第一期工作報告，民國67年9月出版。P 22 。P33～46.