

中學數學是什麼

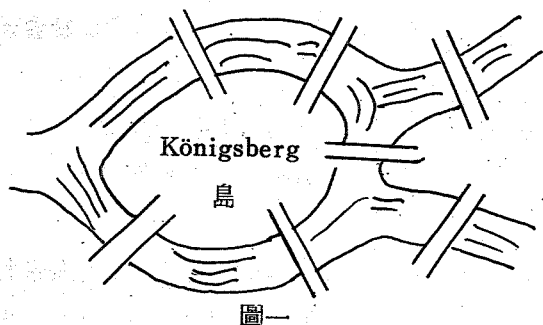
國立臺灣師範大學

數學系

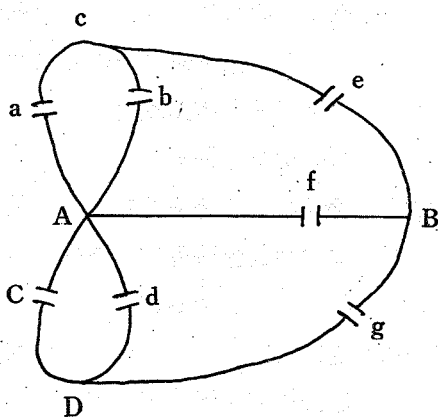
李嘉淦

自從人類有文化開始，數學就已具有其基礎，也就是說，數學是與人類的生活共同存在的，也和人類的生活相互促進發展，進而達到支配文化、促進文明。時至今日，一切科學，更以數學為一切科學之母，正如 Rintoger 說過，「對於研究所有的科學，必須具備且不可缺少的，第一是數學，第二也是數學，第三還是數學。」它真正的含義，不僅僅是指數學的知識而言，而更重要的是數學的精神、數學的思想與數學的方法。

在德國的 Königsberg 城有七座橋樑，如下圖一，很多人有興趣去研究它，能不能不重複的一次走完這七座橋？於是就產生了“七橋問題”

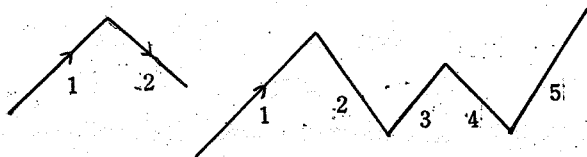


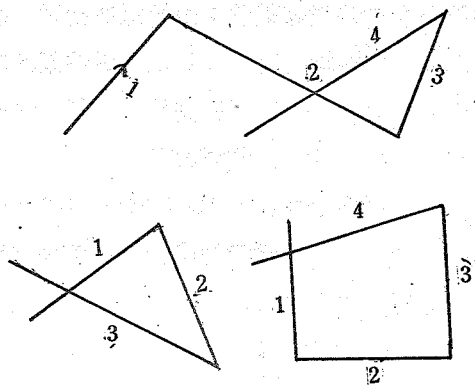
；這個實用的問題，引起了自由思考的思想，激發了深厚研究的興趣，由傳統的思想路線，導致出分析的方法，簡化的過程，如下圖：



將原有的七橋問題，改變為圖二的畫法，能否過 A、B、C、D 四點而一筆（將筆置於紙面，不離開紙面畫之，使不重複任一段）完成之？研討這個畫法的開始，當然應該由同樣的或類似的簡單問題或具體的問題來着手，然後使之組織的系統化，再而研討計劃，使其慎密的嚴謹的思考，而擴大為一般化，這樣才是最有效的數學的方法。

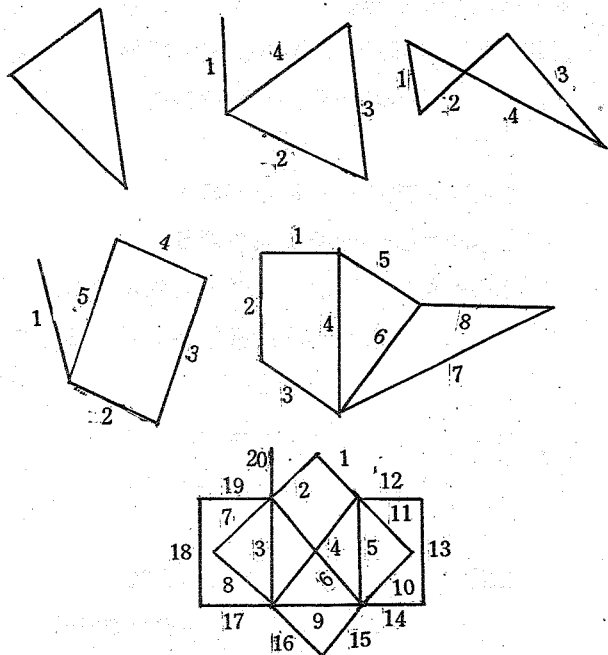
於是將筆在紙上，不離開紙面，使不重複任一線段或曲線段，可以畫出許多的折線圖形，或





圖三

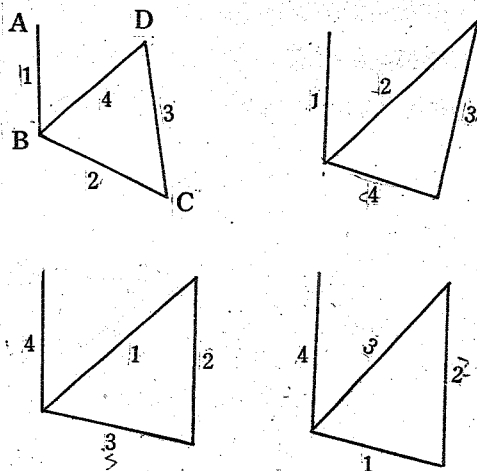
封閉圖形、半封閉圖形，



圖四

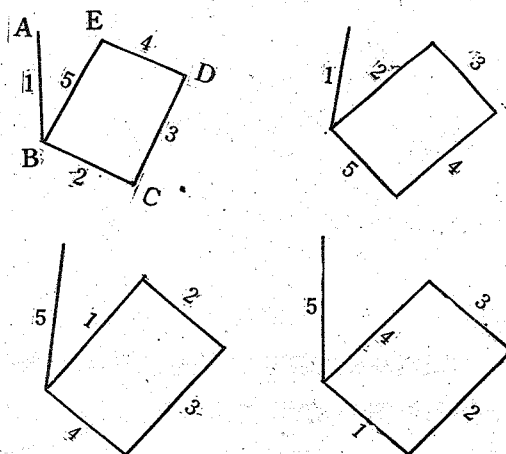
依照所列的次序，這樣的圖形，可以任意的自由思考，而畫出很多很多，由此每一線段假設是一條路，其間表示可以跨過一座橋，顯然的將有計劃的處理這個問題；如果將上圖三、圖四的次序變動，有的可以一筆畫出，有的就不可以了；如果將起點變動，有的可以一筆完成，有的也就不可以了；今依線段的增多，系統的畫出來，當然一線段、二、三線段都有可能畫出來，究竟有什

麼情況畫不出來呢？

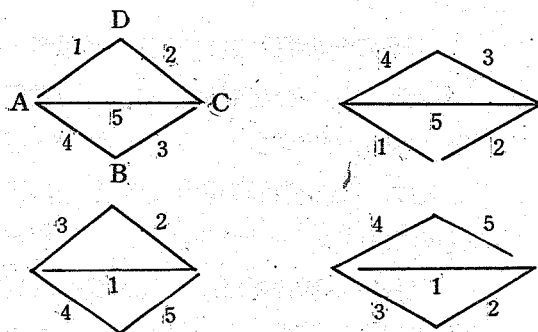


圖五

四線段時，自A、B為起點的都可能畫出來，而自C、D為起點的就畫不出來。

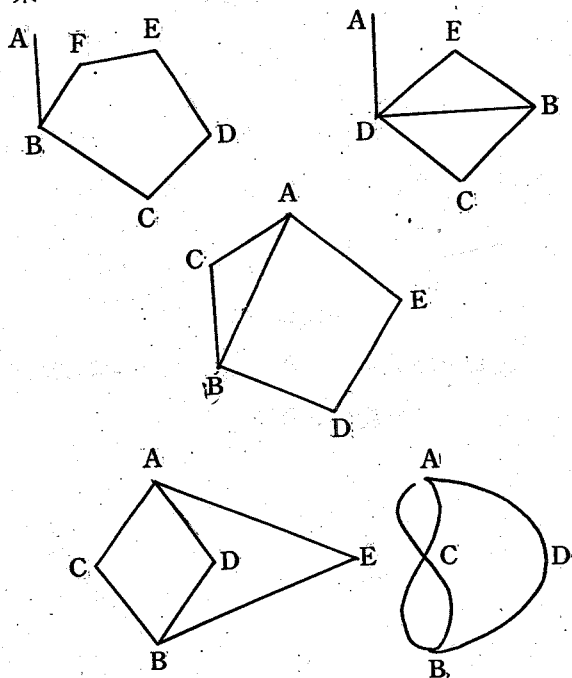


圖六



圖七

五線段時，在圖六中與四線段的意義相同，自A、B爲起點的都畫得出來，而自C、D、E爲起點的都畫不出來；而在圖七中，自A、C爲起點的都畫得出來，自B、D爲起點的都畫不出來。



圖八

如果這樣繼續畫下去，雖然能組織系統化，而不研討計劃，當然不知道是怎樣的，於是，仔細研究，使思想經濟化，顯然可以發現，當起點與終點以外的點，若有奇數條線段，就畫不出來了。

但是爲什麼呢？就需要慎密的思考，除了起點與終點外，若經過任意一點，必有進與出的路線，也就是說有進而沒有出的路線，就變爲終點了；而有出沒有進的路線，當然是起點了，這樣就與假設矛盾了，所以除了起點與終點以外的點，不可能有奇數條線段；也就是說這樣的圖形就畫不出來了，經過了這種嚴密化，就可以推出一個一般化，那就是要畫出這樣的圖形，至多在起點與終點可能爲奇數條線段外，其他所經過的任意一

點，絕不可能有奇數條線段；由於這種精神，就知道圖二中的四點均有奇數條線段，當然起、終點只有兩點，那麼這個圖形就畫不出來了，而七座橋問題也就解出其不能的理由了。

有一次一個學生問我， $10 + 10 + 40 = 60$ 是不是很简单，當然以當時的情況，答案是肯定的，可是他把算式寫出來，

$$\begin{array}{r} \text{TEN} \\ \text{TEN} \\ + \text{FORTY} \\ \hline \text{SIXTY} \end{array}$$

要去找出一字母表不同的數字時，當然就不是很簡單的，必須採用既有的結構、組織、系統及其嚴密性，配合經濟化的思考與探討，才可以推出，於是可得

1. 由個位數可知N爲0或5，
2. 由十位數字即得E爲0或5
3. 由個位與十位的T、Y，可知N爲0
4. 由每一字母表不同的數字時，可知E爲5
5. $F \neq S, F + 1 = S$

$$\begin{array}{l} 6. \text{ 或 } \left\{ \begin{array}{l} T + T + R + 1 = 10 + X \\ 0 + 1 = 10 + 1 \Rightarrow 0 = 9 + 1 \\ 1 \neq 0 \quad \text{故無解} \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 7. \text{ 因 } \left\{ \begin{array}{l} T + T + R + 1 = 20 + X \\ 0 + 2 = 10 + 1 \Rightarrow 0 = 8 + 1 \\ 1 \neq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

$$8. \text{ 由 7. 中可知 } 0 = 9, 1 = 1$$

$$9. \text{ 因 } T + T + R = 19 + X$$

$$X \neq 0, 1, \Rightarrow 6 \leq T, R < 9, T \neq R$$

$$T, R \neq 5, 9$$

X	2	2	2	4	4
T	6	7	8	7	8
R	9	7	5	9	7

不合不合不合不合

$$(F, S) = (2, 3) \text{ 或 } (F, S) = (3, 4)$$

故得 $X = 4$, $T = 8$, $R = 7$, $F = 2$,

$S = 3$

10. $Y = 6$

即得

$$\begin{array}{r} 850 \\ 850 \\ +) 29786 \\ \hline 31486 \end{array}$$

同法可推出

$$\begin{array}{r} \text{SEND} \qquad 9567 \\ + \text{MORE} \Rightarrow +) 1085 \\ \hline \text{MONEY} \qquad 10652 \end{array}$$

由是可知數學的發展，自然具有兩大主要的動力，一為實用性，一為理論性；兩者相互依倚而推演，由而引起興趣，從事研討，獲得瑣碎的知識，加以適度抽象化，經由組織系統化的精鍊，形成理論之基礎，再相互刺激發展，互相推動，而更有新的創見，茲歸納出下列幾個原則。

1 解決實際問題之實用性：

對於所發現的問題，抓住其中心思想，了解解決的程序與方法，盡量使其簡化，形成了一類型的簡易且具體的問題，從事一般性的研討，而獲得了更新的推演課題，由於新課題的發現，再加以解決，而創作出新的基本法則，綜合得到肯定的結論。

2 理論法則之一般性：

新課題之發現，乃由於原始狀態隨著互相推動的原因，拓大而成廣泛而普遍的事理，使對文明更有所獻益。

3 理論組織的系統性：

諸多課題之發掘，瑣碎漫散的研討，其一般性各自存在，互不相關，若不加以組織，尋找其

連繫功能，就無法達成應有的目的；於是人們依著文明之進步發展，組織成有關聯的體系。

4 啟發創意的精神：

適度抽象化的方法、法則等教材，足夠為研究發明的主流，培養其發現的技巧，鍛鍊其理解、領會的能力，以啟發有創意、有創見的腦筋，領悟到新課題的解決原則。

5 建立結構的統一性：

統一結構的建立，均具有個別的必要性，隨著科學的進步、人智的發展，統一建立的嘗試表現，使同一境界、同一範疇的課題予以統一。

6 強調教育的嚴密性：

純粹數學的嚴密性，導致教學上的強制注入的態度，產生了反效果；其實是適合教育中，滿足學生心智能力，發展程度的嚴密性，使能體會到系統的方法，創見的精神及統一性，更為適當。

7 理解思考的經濟性：

理解思考的節拍，是按步就班，不容許有理論的跳躍的，且以思考的明晰與嚴密，及其思維活動及精慎思想的養成，若以冗長複雜的文句，不但難予瞭解，且易導致內容的紊亂，故宜採用更多簡單的術語、符號，而予以經濟化，充份發揮其處理的方便與其經濟價值。

8 思想的自由性：

人類精神活動，衝動強烈的思考，經由自由發掘，無限制的發展，以達到深奧無限的境界。使純正數學、特異數學均能不斷的發展，思路脫離自然而存在。

(下接 27 頁)

我們現在所用的變壓器吧！在11月，他就宣佈了他的「感應電流理論」，而解釋了1820～1831年的所有有關電磁感應的困擾問題。當他一看到感應電流的產生及停止，他就馬不停蹄的繼續向前邁進，不數日之間，他就有辦法用一打以上的實驗來證實他的「感應電流理論」，他可用變動的電流、變動的磁場來產生感應電流。不久他就完成了利用磁鐵來產生連續電流的裝置（即今日發電機的雛形），這不就是他在1821年所做的帶電流導線在磁極周圍做連續運動的回響嗎？

事實在未揭發前，大家各走各路的在研究，一旦揭發了，就發生了誰最先發明的爭議。阿拉哥比較沒事，他承認他只認定他所看到的現象（阿拉哥效應）是對的，甚至於有關「感應磁」的解釋都歸功於他的年輕同事杜漢漠（Duhamel）。但是安培就不同了，他一聽到法拉第的結果，立刻就將他與瑞伏在日內瓦所得的結果加以修訂後，在1831年末發表出來。此時他對「感應電流」的產生更確定了些，只是所用資料仍是六年前的老資料，沒有更進一層的東西。他與法拉第之間當然有些爭議，但在情緒冷靜以後，安培仍向法拉第承認，他整個電磁研究的目標只在解決一個問題，即金屬內是否含有「磁分子」，以便瞭解物質磁化的過程。故安培的實驗是在尋找一個「是」與「否」的答案。而法拉第則是就整個問題來探究的，故實驗對他來說是一種可供依賴的研究指標。

從以上歷史過程，我們發現，在研究的過程裡，心裡的偏向往往會使人忽略掉一個重要的自然內涵。這事不止發生在安培身上，事實上，與安培同期的許多科學家們都未曾看出電磁感應的步驟與時間的相依關係，即使有的人想到了時間因素，却與自然應有的內涵連不起來。故阿拉哥效應所顯示的時間因素並未受到應有的認識！

不管如何，不可否認的，由於大家在1820

～1831年間的努力，電動力學已邁開了腳步。在這十年間分別有安培定律及法拉第定律的完成，還有無單磁極存在的認定，再加上在這以前的庫倫（或高斯）定律，而使得1836年，馬克斯威爾（Maxwell）在修訂了安培定律以後（即除了電流能產生磁場外，電場隨時間的變化亦可產生磁場），完成了馬克斯威爾公式，使得電磁學（或電動力學）有一完滿的成果。

註：

本文主要參考資料為：Samuel Devons, The Physics Teacher V. 16 No.9, 625 (1978)

（上接14頁）

註8 卓播禮（L. Thowbridge）「科學師資培育之趨勢與可行辦法」，科學教育月刊第15期，師大科教中心，pp. 11～13（民國67年1月）。

（上接17頁） 材及教法的調查工作。

(3)研究聯考技術的改進問題。

(4)配合教材的改進工作，全面推展正常的教學法。

(5)下次會議討論重點為：如何進行中等學校數學及自然科學教材及教法的調查。

今天的會議到此結束，謝謝各位。

（上接21頁）

在這個時時刻刻在無窮轉變的宇宙現象中，表面上似乎無相關的事物與事物之間，實際上隱藏在理性與理法之間，具有同質同型的密切關係，不變的法則，萬古不化的性質，使宇宙萬物裡面，潛涵著驚奇的神秘的關聯，播放出美妙的形相、真美的本質、真藝術的馥香，更使內心深處，感到喜悅而神往。